95. Über die Klassenkörpertheorie für unendliche Erweiterungen von einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper

Von Mitsuya MORI

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., July 12, 1957)

§ 1. **Einleitung.** Es sei k_0 ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper, k eine algebraische Erweiterung von k_0 unendlichen Grades $N=N_\infty N_e$, wobei N_∞, N_e den unendlichen bzw. endlichen Bestandteil[1] von N bedeuten. Die endlichen abelschen Erweiterungen K von k laßen sich durch die Theorie von Moriya [3] insofern beherrschen, als der Grad $[K:k]$ von K über k zu N_∞ prim ist. Dann werden z. B. die galoisschen Gruppen von K/k isomorph der Faktorgruppen $k^*/N_{K/k}K^*$, wobei k^* und K^* die Multiplikationsgruppe der Körper k, bzw. K bezeichnen. Diese Theorie ist von Kawada [2] in die Theorie der Klassenformation eingeordnet worden.

In der vorliegenden Arbeit soll nun gezeigt werden, daß man eine einheitliche Theorie bekommt, die den Fall von nicht zueinander primen N und $[K:k]$ nicht ausschließt, wenn man statt k^* eine kompakte projektive Limesgruppe, welche wir die Fundamentalgruppe von k nennen wollen, einführt. Im § 2 definieren wir diese Fundamentalgruppe. Im § 3 betrachten wir die abelschen Erweiterungen von k an sich. Im letzten § 4 geben wir ein typisches Beispiel.

Zum Schluß möchte ich Herrn Professor Y. Kawada meinen herzlichen Dank für seine wertvollen Ratschläge aussprechen.

§ 2. **Fundamentalgruppe.** Es sei k wie in der Einleitung eine unendliche algebraische Erweiterung von einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper k_0. In k gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}^*$ derart, daß $\mathfrak{p}^*=\lim \mathfrak{p}_n$, $k=\lim k_n$ wird, wobei k_n der $\mathfrak{p}_n$-adische Zahlkörper ist. Bezeichnen wir mit $k_\mu^\wedge(\mu\geqq 1)$ die kompakte Gruppe, welche aus der Multiplikationsgruppe k_μ^* von k_μ nach der Artinschen Komplettierung[2] entsteht, und mit $N_{\mu,\nu}^\wedge(\mu<\nu)$ den stetigen Homomorphismus von $k_\nu^\wedge$ in $k_\mu^\wedge$, welcher durch die Norm von k_ν nach k_μ induziert wird. Mit Hilfe von $N_{\mu,\nu}^\wedge$ kann man eine kompakte projektive Limesgruppe $\varprojlim k_\mu^\wedge$ definieren. Diese Limesgruppe wollen wir die *Fundamentalgruppe von k* nennen, und mit $\mathfrak{F}(k)$ bezeichnen.

$\mathfrak{F}(k)$ kann auch wie folgt aufgefaßt werden. Ein Inbegriff einer Folge $\{H_n, n=1,2,3,\cdots\}$ von Untergruppen H_n von k_n^* und einer positiven ganzen Zahlen ν heißt ein *G-System in k vom Index ν*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllen: 1) $H_n=N_{\nu,n}^{-1}H_\nu$, $n=\nu+1,\nu+2,$

1) Vgl. Moriya [3].

2) Vgl. Artin [1].

$\cdots$; 2) $(k_n^* : H_n) = (k_\nu^* : H_\nu)$ $(< +\infty)$, $n = \nu+1, \nu+2, \cdots$; 3) $H_n = N_{n,\nu} H_\nu$, $n = \nu-1, \nu-2, \cdots, 2, 1$. Wir bezeichnen es mit $U(\nu, H_n)$. Zwei G-Systeme $U(\nu, H_n)$, $U(\nu', H_n')$ heißen *äquivalent*, in Zeichen: $U(\nu, H_n) \sim U(\nu', H_n')$, wenn ein Index ρ existiert derart, daß $\rho \geqq \nu, \nu'$ und $H_\rho = H_\rho'$ ist. Die durch Zeichen $\sim$ ausgedrückte Äquivalenz-Beziehung bewirkt eine Einteilung aller G-Systeme in k in Klassen, die wir *G-Klasse in k* nennen wollen. Alle G-Klassen in k bilden eine abzählbar unendliche Menge, die wir durch $\mathfrak{A}$ bezeichnen. Nun kann man eine Menge $\{U(\nu_i, H_n^{(i)});\ i = 1, 2, \cdots\}$ von G-Systemen mit folgenden Eigenschaften finden: 1) $\nu_1 < \nu_2 < \cdots$; 2) $H_n^{(i)} \supseteqq H_{n+1}^{(i)}$, $1 \leqq n \leqq \nu_{i+1} - 1$; $i = 1, 2, \cdots$; 3) $H_n^{(i)} \supsetneqq H_{n+1}^{(i)}$, $\nu_{i+1} \leqq n$; $i = 1, 2, \cdots$; und 4) für eine beliebige Untergruppe D_n vom endlichen Index von k_n^* gibt es ein $U(\nu_i, H_n^{(i)})$ mit $D_n \supseteqq H_n^{(i)}$. Nun bezeichne $\varphi_{i,j}^{(\mu)}$ $(i < j)$ den Homomorphismus von $k_\mu^*/H_\mu^{(j)}$ auf $k_\mu^*/H_\mu^{(i)}$: $\varphi_{i,j}^{(\mu)} : a_\mu$ modulo $H_\mu^{(j)} \rightarrow a_\mu$ modulo $H_\mu^{(i)}$. So können wir eine kompakte projektive Limesgruppe $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}\, k_\mu/H_\mu^{(i)}$ für jedes $\mu \geqq 1$, die, wie man leicht einsieht, isomorph zu $k_\mu^\wedge$ ist, definieren. Nun sei $N_{\mu,\nu}^{(i)}$ $(\mu < \nu)$ der Homomorphismus von $k_\nu^*/H_\nu^{(i)}$ in $k_\mu^*/H_\mu^{(i)}$ (für $\mu \geqq \nu_i$ Isomorphismus): $N_{\mu,\nu}^{(i)} : a_\nu$ modulo $H_\nu^{(i)} \rightarrow N_{\mu,\nu} a_\nu$ modulo $H_\mu^{(i)}$. So wird eine kompakte projektive Limesgruppe $F_j = \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\, k_\mu/H_\mu^{(j)}$ für jedes $j \geqq 1$ definiert. Es ist $F_j \cong k^*/H_\mu^{(j)}$ $(\mu \geqq \nu_j)$. Ferner definieren wir $\varphi_{i,j}(\alpha_\mu^{(j)}) = (\varphi_{i,j}^{(\mu)} \alpha_\mu^{(j)})$ für $(\alpha_\mu^{(j)})$ aus F_j. Dann wird noch eine projektive Limesgruppe $\mathfrak{F}^\wedge = \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\, F_j$ definiert. Nach der Definition und aus der Gleichung $N_{\mu,\nu}^{(i)} \varphi_{i,j}^{(\nu)} = \varphi_{i,j}^{(\mu)} N_{\mu,\nu}^{(j)}$ ergibt sich $\mathfrak{F}(k) \cong \mathfrak{F}^\wedge$. Nun sei $\mathfrak{S} = \{U(\mu_i, H_n^{(i)})\}$ ein beliebiges vollständiges Vertretersystem von $\mathfrak{A}$. Eine Folge $(a_n) = (a_1, a_2, \cdots)$ von Elementen a_n aus k_n^* heißt eine *Fundamentalfolge in bezug auf* $\mathfrak{S}$, wenn es für jedes $i \geqq 1$ eine Zahl J_i derart gibt, daß $a_m \equiv N_{m,m+1} a_{m+1}$ $(\mathrm{mod}\ H_m^{(i)})$, $m \geqq J_i$. Wenn die Kongruenzen $a_m \equiv 1$ $(\mathrm{mod}\ H_m^{(i)})$, $m \geqq J_i$, gelten, nennen wir die Folge (a_n) *eine Einsfolge in bezug auf* $\mathfrak{S}$. Ist $\mathfrak{S}'$ ein anderes vollständiges Vertretersystem von $\mathfrak{A}$, dann ist unmittelbar eingeleuchtet, daß eine Fundamentalfolge (Einsfolge) in bezug auf $\mathfrak{S}$ auch eine in bezug auf $\mathfrak{S}'$ ist. Also können wir von einer Fundamentalfolge (Nullfolge) in k reden. Zwei Fundamentalfolgen (Einsfolgen) (a_n), (b_n) heißen *gleich*, in Zeichen: $(a_n) \sim (b_n)$, wenn von einem Index ρ ab immer $a_\rho = b_\rho$, $a_{\rho+1} = b_{\rho+1}, \cdots$ wird. Alle Fundamentalfolgen (Einsfolgen) werden in Klassen von in diesem Sinne gleichen Fundamentalfolgen (Einsfolgen) eingeteilt. Diese Klasse nennen wir eine *Fundamentalklasse* (*Einsklasse*) *in* k. Die Klasse, zu der (a_n) gehört, wird mit $\langle a_n \rangle$ bezeichnet. Wir können das Produkt zweier Klassen $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$ erklären als die Klasse, zu der das Produkt $(a_n b_n) = (a_n) \times (b_n)$ gehört. Also bilden die Fundamentalklassen in k (bez. die Einsklassen in k) eine multiplikative Gruppe $\mathfrak{F}$ (bez. $\mathfrak{N}$). Dann kann man zeigen, daß $\mathfrak{F}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{F}^\wedge$ (algebraisch) ist.

§ 3. Abelsche Erweiterung. Für eine endliche Erweiterung K von k sei $K=\lim K_n$, $K=k(\theta)$, $K_n=k_n(\theta)$, $[K_n:k_n]=[K:k]=h$. Im folgenden sei K/k abelsch. Dann kann man die K_n, k_n so wählen, daß K_n/k_n abelsch, und zwar, daß die galoissche Gruppe $G_n=G(K_n/k_n)$ mit der galoissche Gruppe $G=G(K/k)$ isomorph ist. σ aus G wirkt auf (A_n) aus $\mathfrak{F}(K)$ durch $(A_n)^\sigma=(A_n^{\sigma_n})$, wobei σ_n die σ zugeordnete Substitution aus G_n bedeutet. Ferner definieren wir $N_{\hat{K}/k}(A_n)=\Pi\,(A_n)^\sigma$, wobei σ die Elemente der Gruppe G durchläuft. $f K_\mu/k_\mu$ bezeichne den kanonischen 2-Cozyklus für $(G_\mu, K_\mu^\wedge)$. Nun sei das Symbol $((K_\mu/k_\mu)/\sigma_\mu)$ für σ_μ aus G_μ durch $((K_\mu/k_\mu)/\sigma_\mu)=\Pi\, f K_\mu/k_\mu(\rho_\mu, \sigma_\mu)$ modulo $N_{K_\mu/k_\mu}K_\mu^\wedge$, wobei ρ_μ die Elemente der Gruppe G_μ durchläuft, definiert. Dann definieren wir das Normenrestsymbol $(a_\mu, K_\mu/k_\mu)$ für a_μ aus $k_\mu^\wedge$ durch $(a_\mu, K_\mu/k_\mu)=\sigma_\mu$, wenn $((K_\mu/k_\mu)/\sigma_\mu)\equiv a_\mu$ modulo $N_{K_\mu/k_\mu}K_\mu^\wedge$ ist. Wie man leicht einsieht, besitzt das Symbol $(a_\mu, K_\mu/k_\mu)$ alle Eigenschaften von Normenrestsymbol im klassischen Fall.[3] Insbesondere ist $k_\mu^\wedge/N_{\hat{K}_\mu/k_\mu}K_\mu^\wedge$ infolge der Zuordnung $a_\mu\to(a_\mu, K_\mu/k_\mu)$ isomorph mit G_μ. Es sei (a_μ) beliebiges Element aus $\mathfrak{F}(k)$. Da $a_\mu=N_{\mu,\nu}a_\nu(\mu<\nu)$ ist, also nach dem Verschiebungssatz $(a_\mu, K_\mu/k_\mu)=(a_\nu, K_\nu/k_\nu)$ ist, kann man (a_μ) so eine σ aus G zugeordnen, daß für jedes μ $(a_\mu, K_\mu/k_\mu)=\sigma_\mu$ wird, wobei σ_μ die durch σ induzierte Substitution aus G_μ bedeutet. Nunmehr definieren wir Normenrestsymbol von K durch $((a_\mu), K/k)=\sigma$. Da $N_{\hat{K}/k}\mathfrak{F}(K)=\underleftarrow{\mathrm{Lim}}\, N_{K_\mu/k_\mu}K_\mu^\wedge$ ist, ergibt sich sofort, daß $\mathfrak{F}(k)/N_{\hat{K}/k}\mathfrak{F}(K)$ infolge der Zuordnung $(a_\mu)\to((a_\mu), K/k)$ isomorph mit G ist.

Nun bezeichne K irgendeine unendliche abelsche Erweiterung von k, und ferner sei $K=\lim E$, wobei E/k endliche abelsche Erweiterung und $[E:k]<\infty$ ist. Die kompakte galoissche Gruppe $G(K/k)$ von K/k wird nun als projektive Limesgruppe aufgefaßt. Also kann man $((a_\mu), K/k)=\lim((a_\mu), E/k)$ definieren. Ferner setzt man $N(K/k)=\bigcap N_{\hat{E}/k}\mathfrak{F}(E)$, wobei E alle endlichen Unterkörper von K durchläuft. Dann kann man zeigen, daß diese Gruppe $N(K/k)$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathfrak{F}(k)$ ist, und die Faktorgruppe $F(k)/N(K/k)$ infolge der Zuordnung $(a_\mu)\to((a_\mu), K/k)$ isomorph mit der galoisschen Gruppe von K/k wird (*Isomorphiesatz*). Insbesondere ist A_k die maximale abelsche Erweiterung von k, Γ_k die galoissche Gruppe von A_k/k, dann ist $N(A_k/k)$ die Einheitsgruppe, und wird $\mathfrak{F}(k)$ isomorph mit Γ_k.

Es sei $\mathfrak{M}$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathfrak{F}(k)$. Dann ist $\mathfrak{M}=\underleftarrow{\mathrm{Lim}}\,\mathfrak{M}_\mu$ mit abgeschlossener Untergruppe $\mathfrak{M}_\mu$ von $k_\mu^\wedge$. Also existiert eine abelsche Erweiterung L_μ von k_μ derart, daß $N(L_\mu/k_\mu)=\mathfrak{M}_\mu$ ist. Ist dann $L=\lim L_\mu$, so ist L eine abelsche Erweiterung von k derart, daß $N(L/k)=\mathfrak{M}$ ist (*Existenzsatz*).

Schließlich bemerken wir, daß unter Berücksichtungung der

3) Vgl. Artin [1].

Klassenkörpereigenschaft von einzelnen k_μ, und der Beziehung zwischen den Untergruppen von $\mathfrak{F}(k)=\varprojlim k_\mu^\wedge$ und den von $k_\mu^\wedge$, und ferner nach Definition von Normenrestsymbol $((a_\mu), K(k))$ von abelscher Erweiterung K/k sich alle die Sätze über Kompositum, Anordnung, Verschiebung und die über Unterkörper vom Klassenkörper im klassischen Fall jetzt in ganz entsprechender Weise für diesen Körper k übertragen lassen.

§ 4. **Beispiel.** Nun sei p_0 eine rationale Primzahl, und k_0 der p_0-adische Zahlkörper, k die maximale unverzweigte Erweiterung von k_0. Es sei $k=\lim k_n$, $k_n=k_0(\zeta_n)$, $\zeta_n=\exp(2\pi i/(p_0^{f_n}-1))$. Sei I_p die Ordnung aller ganzen Zahlen aus einem p-adischen Zahlkörper, $\bar{I}=\Pi I_p$ das direkte Produkt von I_p, wobei p alle (rationalen) primen Zahlen durchläuft. Bezeichnet $(p_0)_{\bar{I}}$ die Gruppe aller Potenzen p_0^m mit m aus $\bar{I}$. Dann besitzt $k_n^\wedge$ die direkte Zerlegung $k_n^\wedge=(p_0)_{\bar{I}}\times U_0(k_n)$, wobei $U_0(k_n)$ die Gruppe der Einheiten in k_n bedeutet. Ferner läßt sich $U_0(k_n)$ in das direkte Produkt $\mathfrak{R}_n\times U_1(k_n)$ zerlegen, wobei $\mathfrak{R}_n$ die Gruppe aller $(p_0^{f_n}-1)$-ten Einheitswurzeln, und $U_1(k_n)$ die Gruppe der Einseinheiten in k_n bedeuten. Daraus folgt: $\mathfrak{F}(k)=\varprojlim \mathfrak{R}_n\times\varprojlim U_1(k_n)$.

Nun sei K eine abelsche Erweiterung vom Grade h von k. Diese ist eine vollständig verzweigte Erweiterung von k. Ist $h=ep_0^u$, $(e, p_0)=1$, dann ist K ein direktes Produkt von zwei abelschen Erweiterungen L, M von k, wobei $[L:k]=e$, $[M:k]=p_0^u$ sei. Ferner wird dann $L=k((p_0\eta)^{1/e})$, und daher gilt:

$$N_{L/k}^\wedge\mathfrak{F}(L)=\varprojlim \mathfrak{R}_n^e\times\varprojlim U_1(L). \tag{1}$$

Anderseits sei $M=\operatorname{Lim} M_n$, $M=k(\alpha)$, $M_n=k_n(\alpha)$, $[M_n:k_n]=p_0^u$. Dann haben wir:

$$N_{M/k}^\wedge\mathfrak{F}(M)=\varprojlim \mathfrak{R}_n\times\varprojlim N_{M_n/k_n}U_1(M_n). \tag{2}$$

Referenzen

[1] E. Artin: Algebraic Functions and Algebraic Numbers, I, New York University (1951).

[2] Y. Kawada: On class formations, Duke Math. J., **22**, 165–177 (1955).

[3] M. Moriya: Klassenkörpertheorie im Kleinen für die unendlichen algebraischen Zahlkörper, J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, **5**, 9–66 (1936–1937).