22. L'Intégrale de Denjoy et l'Intégration au Moyen des Espaces Rangés. IV

Par Shizu NAKANISHI
Faculté des Sciences, Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Feb. 12, 1958)

Nous avons considéré dans les Notes I, II et III précédentes[1] que nous pouvons appliquer la notion des espaces rangés à définir l'intégrale au sens de Denjoy. Dans cette Note, nous allons donner une autre définition de l'intégrale au sens de Denjoy, en utilisant la méthode des espaces rangés.

Soit X l'ensemble des couples (f, F) telles que:

i) $f(x)$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue définie dans l'intervalle $[a, b]$.

ii) F est un ensemble fermé contenu dans $[a, b]$.

iii) $f(x)$ s'annule pour tout x n'appartenant pas à F.

Nous ferons les conventions suivantes:

1. $(f, F)=(f_1, F_1)$ signifiera $f=f_1$ et $F=F_1$.
2. $(f_1, F_1)\pm(f_2, F_2)=(f_1\pm f_2, F_1\cup F_2)$.
3. $c(f, F)=(cf, F)$, c est un nombre réel.

Tout d'abord, nous allons introduire dans l'espace X une topologie et un rang. Étant donnés un entier positif ou nul ν et une fonction (f, F) quelconque de X, définissons le voisinage $V(\nu, (f, F))$ de la fonction (f, F) comme suit: Le voisinage $V(\nu, (f, F))$ est la totalité des fonctions (f_1, F_1) de X qui jouissent de la propriété suivante: (f_1, F_1) est une somme de la fonction (f, F) et une fonction (f^*, F^*) de X (nous désignerons par $(f^*, F^*; F')$ plus précisément), c.-à-d.

$$(f_1, F_1)=(f, F)+(f^*, F^*; F'),$$

qui satisfait aux condition suivantes:

1°) F^* et F' sont des ensembles fermés tels que $F^*\supseteq F'\supseteq F$.

2°) $f^*(x)$ s'annule pour tout x appartenant à F'.

3°) Pour tout système élémentaire[2] d'intervalles I_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ tel que $I_i\cap F'$ n'est pas vide pour tout i, on a

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} f^*(x)\,dx\right|<2^{-\nu}.$$

Alors, on voit aussitôt que les voisinages ainsi définis satisfont aux conditions (A) et (B) de F. Hausdorff.[3] Pour la profondeur $\omega(X)$ de

---

1) S. Nakanishi: L'intégrale de Denjoy et l'intégration au moyen des espaces rangés. I-III, Proc. Japan Acad., **32**, 678-683 (1956); **33**, 13-18, 265-270 (1957).

2) On dit qu'un système d'intervalles est élémentaire, lorsqu'il est composé d'un nombre fini d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres.

3) Voir F. Hausdorff: Grundzüge d. Mengenlehre, p. 213.

l'espace X, on a d'abord $\omega(X) \geq \omega_0$, puisque le système des voisinages satisfait à la condition (B) de F. Hausdorff. D'autre part, les voisinages $V(\nu, (f, F))$ $(\nu=0, 1, 2, \cdots)$ d'une fonction (f, F) tel que $F=\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ par exemple, forment une suite monotone décroissante et maximale. Donc, la profondeur de l'espace X est ω_0. La class $\mathfrak{B}_\nu$ des voisinages de rang ν $(\nu=0, 1, 2, \cdots)$ sera formée, comme définition, de tous les voisinages $V(\nu, (f, F))$ qui satisfont à la condition $\text{mes}\{[a, b]-F\}<2^{-\nu}$. Alors, nous pouvons voir sans peine que, pour tout voisinage $V(\nu, (f, F))$ de (f, F) et pour tout rang μ, il existe un voisinage $V(\nu', (f, F))$ de (f, F) de rang supérieur à μ et qui est contenu dans $V(\nu, (f, F))$. Par conséquent, X est un espace rangé.

Cela posé, nous pouvons démontrer d'abord le

Lemme 1. *Si* $u=u_n$, $u_n=V(\nu_n, (f_n, F_n))$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, *est une suite fondamentale, elle possède les propriétés suivantes*:

1) *La fonction* (f_{2n}, F_{2n}) *s'écrit*

$$(f_{2n}, F_{2n})=(f_{2n-1}, F_{2n-1})+(f^*_{2n-1}, F^*_{2n-1}; F'_{2n-1}),$$

où $(f^*_{2n-1}, F^*_{2n-1}; F'_{2n-1})$ *est une fonction satisfaisant aux conditions* 1°), 2°) *et* 3°), *et on a*

$$f_{2n}(x)=f_{2n+1}(x)=f_0(x)+\sum_{j=1}^{n} f^*_{2j-1}(x) \qquad (n=1, 2, \cdots).$$

2) $F_{2n}=F_{2n+1} \subseteq F_{2(n+1)}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ *et* $\text{mes}\{[a, b]-\bigcup_{n=0}^{\infty} F\}=0$.

Théorème 1. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(\nu_n, (f_n, F_n))$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, *une suite fondamentale. Alors,* $f_n=f_n(x)$ *tend vers une fonction* $f(x)$ *dans l'intervalle* $[a, b]$, *et on a* $f_n(x)=f(x)\cdot C_{F_n}(x)$.[4]

En effet, puisque $F_{2m}=F_{2m+1}$ et $f_{2m}(x)=f_{2m+1}(x)$ pour tout m, il suffit de montrer du cas où $n=2m$. Pour tout $k>m$, il résulte du Lemme 1 que

$$\begin{aligned} f_{2k}(x) &= \sum_{j=1}^{k} f^*_{2j-1}(x)+f_0(x) = \sum_{j=m+1}^{k} f^*_{2j-1}(x)+\left\{\sum_{j=1}^{m} f^*_{2j-1}(x)+f_0(x)\right\} \\ &= \sum_{j=m+1}^{k} f^*_{2j-1}(x)+f_{2m}(x). \end{aligned}$$

Mais comme $f^*_{2j-1}(x)$ s'annule pour tout $x \in F_{2j-1}$ et qu'on a $F_{2j-1} \supseteq F_{2m}$ pour tout $j>m$, on a $f_{2k}(x)=f_{2m}(x)$ pour tout x appartenant à F_{2m}. Par conséquent, pour tout x appartenant à F_{2n}, il existe une limite $\lim_{k\to\infty} f_{2k}(x)=f(x)$ et on a $f(x)=f_{2m}(x)$, c.-à-d. $f_{2m}(x)=f(x)\cdot C_{F_{2m}}(x)$. D'ailleurs, puisque $f_{2m}(x)$ s'annule pour tout x n'appartenant pas à F_{2m}, quel que soit n, on a $\lim_{m\to\infty} f_{2m}(x)=0$ pour tout $x \in \{[a, b]-\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\}$.

Théorème 2. *Soient* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(\nu_n, (f_n, F_n))$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, $v=\{v_n\}$, $v_n=V(\mu_n, (g_n, G_n))$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, *deux suites fondamentales appartenant à la même collection maximale. Posons*

4) Pour un ensemble quelconque M, $C_M(x)$ désigne la fonction caractéristique de M.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad g(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

Alors, nous avons presque partout $f(x)=g(x)$.

En effet, soit $w=\{w_n\}$, $w_n=V(\lambda_n, (h_n, H_n))$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ une suite fondamentale de la même collection maximale telle qu'on ait à la fois $w\le u$ et $w\le v$. D'après la propriété telle que $w\le v$, pour tout $V(\nu_n, (f_n, F_n))$, il existe un intervalle $V(\lambda_m, (h_m, H_m))$ tel que $V(\lambda_m, (h_m, H_m))\subseteq V(\nu_n, (f_n, F_n))$. Donc, la fonction (h_m, H_m) s'écrit $(h_m, H_m) =(f_n, F_n)+(f_n^*, F_n^*; F_n')$, où $(f_n^*, F_n^*; F_n')$ est une fonction satisfaisant aux conditions 1°), 2°) et 3°). Donc, on a $h_m(x)=f_n(x)$ pour tout $x\in F_n$ et on a $F_n\subseteq H_m$. D'autre part, on a, d'après le Théorème 1, $f_n(x)=f(x)\cdot C_{F_n}(x)$ et $h_m(x)=h(x)\cdot C_{H_m}(x)$. Donc, on en déduit que $f(x)=h(x)$ pour tout $x\in F_n$, quel que soit n, de sorte que $f(x)=h(x)$ pour tout $x\in \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$. Puisqu'on a de plus, d'après le Théorème 1, $\operatorname{mes}\{[a, b]-\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\}=0$, nous avons presque partout $f(x)=h(x)$. De même, d'après la propriété telle que $w\le v$, nous avons presque partout $g(x)=h(x)$. Par conséquent, nous avons presque partout $f(x)=g(x)$.

Ainsi, comme l'a fait de Prof. K. Kunugi,[5] si nous identifions deux fonctions qui ne sont différentes que sur un ensemble de mesure nulle, toute collection maximale des suites fondamentales f^* détermine une fonction qu'on peut associer à cette collection maximale.

Théorème 3. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(\nu_n, (f_n, F_n))$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ *une suite fondamentale. Alors, il existe une limite* $\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx$ *pour tout intervalle* I *contenu dans* $[a, b]$. *De plus, si l'on pose*

$$(f_{2j}, F_{2j})=(f_{2j-1}, F_{2j-1})+(f_{2j-1}^*, F_{2j-1}^*; F_{2j-1}'),$$

où $(f_{2j-1}^*, F_{2j-1}^*; F_{2j-1}')$ *est une fonction satisfaisant aux conditions* 1°), 2°) *et* 3°), *on a*

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx=\int_I f_0(x)\,dx+\sum_{j=1}^{\infty}\int_I f_{2j-1}^*(x)\,dx.$$

En effet, pour tout intervalle I contenu dans $[a, b]$, il existe un ensemble F_{2m} tel que $I\cap F_{2m}$ n'est pas vide. Donc, on a d'après la propriété 3°)

$$\left|\int_I f_{2j-1}^*(x)\,dx\right|<2^{-\nu_{2j-1}} \quad \text{pour tout } j>m,$$

de sorte qu'il existe une somme $\sum_{j=1}^{\infty}\int_I f_{2j-1}^*(x)\,dx$. D'autre part, on a d'après le Lemme 1 $f_{2n}(x)=\sum_{j=1}^{n} f_{2j-1}^*(x)+f_0(x)$. Par conséquent, il existe une limite $\lim_{n\to\infty}\int_I f_{2n}(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx$ et on a l'égalité voulue.

---

5) K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I, Proc. Japan Acad., **32**, 215-220 (1956).

Théorème 4. *Soient* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(\nu_n, (f_n, F_n))$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, $v=\{v_n\}$, $v_n=V(\mu_n, (g_n, G_n))$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, *deux suites fondamentales appartenant à la même collection maximale. Alors, pour tout intervalle* I *contenu dans* $[a, b]$, *on a*

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_I g_n(x)\,dx.$$

En effet, puisqu'il existe une suite fondamentale w de la même collection maximale tell qu'on ait à la fois $w\leq u$ et $w\leq v$, il suffit de montrer du cas où $u\leq v$. Or, d'après le Théorème 3, si l'on pose $J=\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx$ et $K=\lim_{n\to\infty}\int_I g_n(x)\,dx$, il existe, pour un nombre positif quelconque ε, un entier positif $n_0=n_0(\varepsilon)$ tel que $2^{-\nu_{n_0}}<\varepsilon/3$ et qu'on ait à la fois

$$\left|\int_I f_n(x)\,dx-L\right|<\varepsilon/3, \quad \left|\int_I g_n(x)\,dx-K\right|<\varepsilon/3 \tag{1}$$

pour tout $n>n_0$. Mais comme l'ensemble $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ partout dense dans $[a, b]$, on voit d'abord qu'il existe un ensemble F_{n_1} tel que $F_{n_1}\cap I$ n'est pas vide et $n_{n_1}>n_0$. Pour l'intervalle $V(\nu_{n_1}, (f_{n_1}, F_{n_1}))$, il existe, d'après la propriété telle que $u\leq v$, une fonction (g_{n_2}, G_{n_2}) telle que $V(\mu_{n_2}, (g_{n_2}, G_{n_2}))\subseteq V(\nu_{n_1}, (f_{n_1}, F_{n_1}))$, par suite $(g_{n_2}, G_{n_2})\in V(\nu_{n_1}, (f_{n_1}, F_{n_1}))$. Alors, (g_{n_2}, G_{n_2}) s'écrit

$$(g_{n_2}, G_{n_2})=(f_{n_1}, F_{n_1})+(f^*_{n_1}, F^*_{n_1}; F'_{n_1}),$$

où $(f^*_{n_1}, F^*_{n_1}; F'_{n_1})$ est une fonction satisfaisant aux conditions 1°), 2°) et 3°). On a donc $g_{n_2}(x)=f_{n_1}(x)+f^*_{n_1}(x)$. De plus, $I\cap F'_{n_1}$ n'est pas vide, puisque $I\cap F_{n_1}\neq 0$ et $F'_{n_1}\supseteq F_{n_1}$. Donc, il résulte de la propriété 3°) que

$$\left|\int_I f^*_{n_1}(x)\,dx\right|<2^{-\nu_{n_1}}\leq 2^{-\nu_{n_0}}<\varepsilon/3.$$

Par conséquent, il s'ensuit que

$$\left|\int_I g_{n_2}(x)\,dx-\int_I f_{n_1}(x)\,dx\right|<\varepsilon/3. \tag{2}$$

D'après (1) et (2), on voit que $|J-K|<\varepsilon$ quel que soit $\varepsilon>0$.

Ainsi, si deux suites fondamentales $u=\{u_n\}$, $u_n=V(\nu_n, (f_n, F_n))$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, et $v=\{v_n\}$, $v_n=V(\mu_n, (g_n, G_n))$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, appartiennent à la même collection maximale f^*, nous avons $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$ $=\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\,dx$.

De plus, on déduit du Théorème 1 et du Théorème 4 que:

Théorème 5. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(\nu_n, (f_n, F_n))$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, *une suite fondamentale. Alors, la fonction* $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *est intégrable au sens de Lebesgue sur tout* F_n, *et on a*

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{I\cap F_n} f(x)\,dx,$$

quel que soit l'intervalle I contenu dans $[a, b]$.

Théorème 6. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(\nu_n, (f_n, F_n))$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, *une suite fondamentale telle que* $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n=[a, b]$. *Posons* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$. *Alors, la fonction* $f(x)$ *est intégrable au sens de Denjoy et on a* $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=(D)\int_a^b f(x)\,dx$.

Démonstration. D'après le Théorème 5, nous pouvons poser $F(I)=\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx$ pour tout intervalle I contenu dans $[a, b]$. $F(I)$ est alors une fonction d'intervalle fini-additive. Soient ε_j $(j=1, 2, \cdots)$ une suite des nombres quelconque telle que $\varepsilon_j \downarrow 0$, F_{n_j} $(j=1, 2, \cdots)$ une suite partielle de F_{2n} $(n=0, 1, 2, \cdots)$ telle que $2^{-\nu_{n_j}}<\varepsilon_j$. Alors, la suite d'ensembles fermés $\{F_{n_j}\}$ jouit des propriétés suivantes:

1) $\{F_{n_j}\}$ est une suite non-décroissante d'ensembles fermés de total $[a, b]$.

2) $f(x)$ est sommable sur tout F_{n_j}.

3) Quel que soit le système élémentaire d'intervalles I_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$, si l'ensemble $I_i\cap F_{n_j}$ n'est pas vide pour tout i, on a

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|F(I_i)-\int_{I\cap F_{n_j}} f(x)\,dx\right|<\varepsilon_j.$$

En effet, les Propositions 1) et 2) résultent du Lemme 1 et du Théorème 1 respectivement. Pour la Proposition 3), d'abord il existe pour tout F_{n_j} un entier positif $m=m(j)$ tel que $\nu_{n_j}=\nu_{2m}$ et $F_{n_j}=F_{2m}$. Soit I_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ une système élémentaire d'intervalles tels que $I_i\cap F_{n_j}\neq 0$ pour tout i. Puisqu'alors $F_{n_j}=F_{2m}$ et $F'_{2n-1}\supseteq F_{2n-1}\supseteq F_{2m}$ pour tout $n>m$, $I_i\cap F'_{2n-1}$ n'est pas vide pour tout $n>m$. Donc, de la propriété 3°), il résulte que pour tout $n>m$

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} f^*_{2n-1}(x)\,dx\right|<2^{-\nu_{2n-1}}=2^{-(2n-1)}.$$

D'ailleurs, on a déjà su, d'après le Théorème 3 et le Lemme 1, que

$$F(I_i)=\lim_{n\to\infty}\int_{I_i} f_n(x)\,dx=\int_{I_i} f_0(x)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{I_i} f^*_{2n-1}(x)\,dx$$

et
$$\int_{I_i\cap F_{n_j}} f(x)\,dx=\int_{I_i} f_{2m}(x)\,dx=\int_{I_i} f_0(x)\,dx+\sum_{n=1}^{m}\int_{I_i} f^*_{2n-1}(x)\,dx.$$

Donc, on en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{i_0}\left|F(I_i)-\int_{I_i\cap F_{n_j}} f(x)\,dx\right|\leq\sum_{n=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} f^*_{2n-1}(x)\,dx\right|<\varepsilon_j.$

Par conséquent, $f(x)$ est intégrable au sens de Denjoy et on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = F([a, b]) = (D)\int_a^b f(x)\,dx.$$[6]

Théorème 7. *Si $f(x)$ est une fonction intégrable au sens de Denjoy dans $[a, b]$, il existe une suite fondamentale $u=\{u_n\}$, $u_n = V(\nu_n, (f_n, F_n))$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, qui possède les propriétés suivantes*:

1) $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n = [a, b]$.

2) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

3) $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = (D)\int_a^b f(x)\,dx$.

Démonstration. Puisque la fonction $f(x)$ est intégrable au sens de Denjoy, il existe une suite non-décroissante, de total $[a, b]$, d'ensembles fermés F_n $(n=1, 2, \cdots)$, qui possède les propriétés suivantes:[7]

a) mes $([a, b]-F_n) < 2^{-n}$.

b) $f(x)$ est sommable sur tout F_n.

c) Quel que soit le système élémentaire d'intervalles I_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$, si $I_i \cap F_n$ n'est pas vide pour tout i, on a

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|(D)\int_{I_i} f(x)\,dx - \int_{I_i\cap F_n} f(x)\,dx\right| < 2^{-(2n+1)}.$$

D'abord, il résulte de la propriété *c*) que:

c') Quel que soit le système élémentaire d'intervalles I_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$, si $I_i \cap F_n$ n'est pas vide pour tout i, on a

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i\cap(F_{n+1}-F_n)} f(x)\,dx\right| < 2^{-2n}.$$

En effet, on a d'après *c*)

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|(D)\int_{I_i} f(x)\,dx - \int_{I_i\cap F_n} f(x)\,dx\right| < 2^{-(2n+1)}.$$

Puisque $F_{n+1} \supseteq F_n$, on a aussi $I_i \cap F_{n+1} \neq 0$ pour tout i, de sorte que

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|(D)\int_{I_i} f(x)\,dx - \int_{I_i\cap F_{n+1}} f(x)\,dx\right| < 2^{-(2(n+1)+1)}.$$

Posons maintenant, pour tout $n=0, 1, 2, \cdots$

$$\nu_n = n,\quad H_{2n} = H_{2n+1} = F_{n+1},\quad f_{2n}(x) = f_{2n+1}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in F_{n+1} \\ 0 & \text{si } x \,\bar{\in}\, F_{n+1}. \end{cases}$$

Alors, nous pouvons voir que $u=u_n$, $u_n = V(\nu_n, (f_n, H_n))$ $(n=0, 1, 2\cdots)$ est une suite fondamentale qui jouit des propriétés voulues dans ce théorème.

6) Voir S. Enomoto: Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions I, Théorème 5, Osaka Math. J., **7**, 69–102 (1955).

7) Voir S. Enomoto: Loc. cit., Théorème 1.