111. *Hypoellipticité*

Par Shigeru MIZOHATA et Yûsaku HAMADA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Oct. 13, 1958)

1. Introduction. Dans sa thèse [2], M. Hörmander a caractérisé l'opérateur hypoelliptique à coefficients constants. Depuis plusieurs résultats ont été obtenus à propos de cette extension à des opérateurs à coefficients variables, en supposant au moins que ces opérateurs soient ponctuellement hypoelliptiques. Or, M. Malgrange a obtenu un résultat remarquable [3] que voici:

Soit $P(x, D)$ un opérateur différentiel à coefficients indéfiniment différentiables, défini dans un ouvert $\Omega \subset R^n$, satisfaisant aux conditions: 1° pour tout point $a \in \Omega$, $P(a, D)$ est hypoelliptique; 2° tous les opérateurs tangentiels $P(a, D)$ attachés à chaque point $a \in \Omega$ sont équivalents entre eux (c'est-à-dire que, soient a et b deux points quelconques de Ω, alors $P(a, D)$ est plus fort que $P(b, D)$ et inversement, dans la terminologie de Hörmander).

Cette Note a pour but de démontrer ce résultat, au point de vue de la méthode de la paramétrix, dont le raisonnement l'un des auteurs a indiqué pour l'opérateur elliptique dans [4]. Cette Note ne contient donc rien de nouveau. Mais le raisonnement que nous allons montrer en bref, suggèrera comment chercher une plus large classe des opérateurs hypoelliptiques.

2. Polynomes complets de type local. Notre point de départ est le fait suivant:

Lemme 2.1 (*Hörmander*). *Soit $P(\xi)$ un polynome complet de type local d'ordre $m \geq 1$. Alors il existent deux nombres positifs c et d tels que, pour R assez grand, on ait $\inf_{\zeta \in V} |\zeta - \xi| \geq c|\xi|^d$ pour $|\xi| \geq R$, où V est l'ensemble des $\zeta \in C^n$ tels que $P(\zeta) = 0$.*

Nous avons alors, pour $\xi \in R^n$, le

Lemme 2.2

i) $$\left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\nu} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi_i} P(\xi)}{P(\xi)} \right| \leq \nu! \frac{2m}{c} \cdot \left(\frac{2\sqrt{n}}{c}\right)^{|\nu|} |\xi|^{-(|\nu|+1)d},$$

ii) $$\left| \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \right| \leq M |\xi|^{-|\alpha| d},$$

pour $|\xi| \geq R$, où M est une constante positive.

Démonstration. Soit $\zeta \in V$, et considérons

$P(\zeta + \eta t) = A(\zeta, \eta) \prod_{r=1}^{m(\zeta,\eta)} (t - t_r(\zeta, \eta))$, on a alors

$\dfrac{d}{dt}P(\zeta+\eta t)/P(\zeta+\eta t)=\sum \dfrac{1}{t-t_r(\zeta,\eta)}$. Prenons $\eta=\eta^{(i)}=(0, 0, \cdots, i, 0, \cdots, 0)$, en posant dans cette relation $t=0$, on a

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_i}P(\zeta)/P(\zeta)=\sum\frac{1}{-t_r(\zeta,\eta^{(i)})}.$$

Compte tenu de $|t_r(\zeta,\eta^{(i)})|\geq \mathrm{dis}(\zeta, V)$, on a, pour ϑ vecteur complexe tel que $|\vartheta|\leq\dfrac{c}{2}|\xi|^d$,

$$|t_r(\xi+\vartheta,\eta^{(i)})|\geq \mathrm{dis}(\xi+\vartheta, V)\geq \mathrm{dis}(\xi, V)-|\vartheta|\geq\frac{c}{2}|\xi|^d.$$

On a donc

(2.1) $\left|\dfrac{\partial}{\partial\zeta_i}P(\zeta)/P(\zeta)\right|\leq\dfrac{2m}{c}\dfrac{1}{|\xi|^d}$, où $\zeta\in C^n$, $|\zeta-\xi|\leq\dfrac{c}{2}|\xi|^d$, $|\xi|\geq R$,

m étant l'ordre de l'opérateur P.

Or, la formule de Cauchy:

(2.2) $$\frac{\partial}{\partial\xi_i}P(\xi)/P(\xi)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{c_1}\cdots\int_{c_n}\frac{1}{(\zeta_1-\xi_1)\cdots(\zeta_n-\xi_n)}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta_i}P(\zeta)/P(\zeta)\times d\zeta_1\cdots d\zeta_n,$$

où $C=(c_1,\cdots,c_n)$ est le polydisque de centre $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ avec rayon $r=\dfrac{c}{2}|\xi|^d\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, montre, compte tenu de (2.1),

(2.3) $$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\frac{\frac{\partial}{\partial\xi_i}P(\xi)}{P(\xi)}\right|\leq\frac{\nu!}{r^{|\nu|}}\sup_{\zeta\in C}\left|\frac{\partial}{\partial\zeta_i}P(\zeta)/P(\zeta)\right|\leq\nu!\frac{2m}{c}\left(\frac{2\sqrt{n}}{c}\right)^{|\nu|}\times|\xi|^{-(|\nu|+1)d}.$$

Cela suffit de montrer la deuxième partie du lemme. En effet, $\dfrac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}P(\xi)/P(\xi)=\dfrac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}P/P\right)-\dfrac{\frac{\partial}{\partial\xi_j}P}{P}\cdot\dfrac{\frac{\partial}{\partial\xi_i}P}{P}$. De proche en proche, on aura l'inégalité demandée.

Lemme 2.3. *Soit $Q(\xi)=\xi^\beta$ un monôme, qui est plus faible que $P(\xi)$. On a alors*

(2.4) $$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\right|\leq\left(\sup_{|\xi|\geq R}2\left|\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\right|\right)\cdot\nu!\left(\frac{\delta}{\sqrt{n}}|\xi|^d\right)^{-|\nu|}$$

pour $|\xi|\geq R$, où δ est une constante positive satisfaisant à l'inégalité (2.5).

Démonstration. La formule $\dfrac{P(\xi+\vartheta)}{P(\xi)}=1+\sum_{|\alpha|\geq1}\dfrac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\dfrac{\vartheta^\alpha}{\alpha!}$, montre que, si l'on prend un $\delta>0$ de manière que, par exemple,

(2.5) $M\sum_{\{\alpha;1\leq|\alpha|\leq m\}}\delta^{|\alpha|}\leq\dfrac{1}{2}$, on aura, en vertu du lemme 2.2,

$\left|\dfrac{P(\xi+\vartheta)}{P(\xi)}-1\right|\leq\dfrac{1}{2}$ pour $|\vartheta|\leq\delta|\xi|^d$, $|\xi|\geq R$. C'est-à-dire que

$$\frac{1}{2}\leq\left|\frac{P(\xi+\vartheta)}{P(\xi)}\right|\leq\frac{3}{2}. \tag{2.6}$$

Alors, la formule de Cauchy:

$$\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}=\Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^n\int_{c_1}\cdots\int_{c_n}\frac{1}{(\zeta_1-\xi_1)\cdots(\zeta_n-\xi_n)}\cdot\frac{Q(\zeta)}{P(\zeta)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n, \tag{2.7}$$

où $C=(c_1,\cdots,c_n)$ est le polydisque autour du $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ de rayon $\dfrac{\delta}{\sqrt{n}}|\xi|^d$, montre l'inégalité cherchée. En effet, $\max\limits_{\zeta\in C}\left|\dfrac{Q(\zeta)}{P(\zeta)}\right|\leq\dfrac{\max|Q(\zeta)|}{\min|P(\zeta)|}$ et $|Q(\zeta)|$ prendra son maximum en un point réel $\xi^\circ\in C$, $|\xi^\circ|\geq|\xi|$; compte tenu de (2.6), on a donc (2.4).

En combinant ce lemme avec le lemme 2.2, on a le

Lemme 2.4

$$\left|\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)^\nu\frac{Q^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\right|\leq M_{\nu,\alpha}|\xi|^{-(|\nu|+|\alpha|)d},\quad pour\ |\xi|\geq R. \tag{2.8}$$

Soit $P_1(\xi)$ un autre polynome complet de type local, qui est plus *faible* que $P(\xi)$. Nous pouvons alors faire à $\dfrac{P_1(\xi)}{P(\xi)}$ le même raisonnement que nous venons de faire à $\dfrac{Q(\xi)}{P(\xi)}$, $Q(\xi)$ étant un monôme. Soient c', d', R' les constantes pour $P_1(\xi)$ dans le lemme 2.1. Nous nous bornerons à énoncer le résultat:

Lemme 2.5

$$\left|\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)^\nu\frac{P_1^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\right|\leq M'_{\nu,\alpha}|\xi|^{-(|\nu|+|\alpha|)d''},\quad pour\ |\xi|\geq\max(R,R'),\ où \tag{2.9}$$

$d''=\min(d,d')$.

3. Constructions des paramétrix. Nous voulons indiquer brièvement la méthode de la construction des paramétrix. Envisageons l'opérateur différentiel $P(x,D)$ à coefficients indéfiniment différentiables, qui au voisinage du point x_0 puisse être mis sous la forme;

$$P(x,D)=P(x_0,D)+\sum_{\nu:\,fini}a_\nu(x)Q_\nu(D),\quad \text{où} \tag{3.1}$$

1° $P(x_0,D)$ est hypoelliptique,

2° $a_\nu(x)\in\mathcal{E}$, $a_\nu(x_0)=0$,

3° les opérateurs sont des polynomes de derivation, dont les polynomes associés $Q_\nu(\xi)$ satisfont à la condition de la forme (2.8) au cas $\alpha=0$, i.e. de la forme (3.3).

Remarquons que cette hypothèse est toujours vérifiée pour l'opérateur que nous avons énoncé au début de cette Note [3, p. 297].

Sous cette hypothèse, on peut construire des paramétrix $E_x(\xi)$, semi-réguliers à deux côtés, telles que

$${}^tP(x,D)E_x(\xi)=\delta_{x-\xi}+\varpi(x,\xi), \tag{3.2}$$

par le procédé que nous avons indiqué dans [4]. Donnons quelques légères modifications à faire. D'abord, on doit étendre l'espace $\mathcal{D}^s$, défini là-dedans, à l'espace suivant:

Définition. Espace Ω_d^s, $d>0$, $-\infty<s<+\infty$. $f\in\Omega_d^s$, *si* $x_1^{\nu_1}\cdots x_n^{\nu_n}f\in D_{L^2}^{s+|\nu|d}$ *pour tout* $\nu\geq 0$. *Nous le munissons de la topologie suivante:* $f_j\to 0$ *dans* Ω_d^s, *si* $x_1^{\nu_1}\cdots x_n^{\nu_n}f_j\to 0$ *dans* $D_{L^2}^{s+|\nu|d}$, *pour tout* $\nu\geq 0$.

D'où

1) $a(x)\in\mathcal{B}$, $f\in\Omega_d^s$, l'application: $(a(x), f)\to a(x)f$ de $\mathcal{B}\times\Omega_d^s$ dans Ω_d^s est continue.

2) $a(x)\in\mathcal{B}_0$, $f\in\Omega_d^s$, alors $(a(x), f)\to a(x)f$ de $\mathcal{B}_0\times\Omega_d^s$ dans Ω_d^{s+d} est continue.

3) Soit ω ouvert tel que $0\notin\omega$, alors l'application $f\in\Omega_d^s$ dans $f_\omega\in D_{L^2}^\infty(\omega)$ est continue, où f_ω=restriction de f à ω.

Nous n'en donnons pas la démonstration, qui serait presque la même que dans [5]. Nous utiliserons, au besoin, la formule de décomposition:

$$a(x)=\sum_{|\nu|\leq m}c_\nu x_1^{\nu_1}\cdots x_n^{\nu_n}+\sum_{|\nu|=m+1}a_\nu(x)x_1^{\nu_1}\cdots x_n^{\nu_n}. \tag{N}$$

Nous utilisons la solution élémentaire $E_x=E_1+E_2(x)$, construite par Hörmander [2, p. 224]: $E_1=\overline{\mathfrak{F}}\left[\left(\frac{1}{P(\xi)}\right)_{|\xi|\geq R}\right]$, et $E_2(x)$ est une fonction entière. On a alors la

Proposition 3.1. *Pour* $\alpha(x)\in\mathcal{D}$ *quelconque,*

$$\alpha(x)E_x\in\Omega_d^{-\left[\frac{n}{2}\right]-1}.$$

Il suffit de démontrer cette propriété pour E_1. Or

$$x^\nu E_1=\overline{\mathfrak{F}}\left[\left(\frac{1}{-2\pi i}\right)^{|\nu|}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\left(\frac{1}{P(\xi)}\right)_{|\xi|\geq R}\right].$$

La distribution entre crochet devient $\left(\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\frac{1}{P(\xi)}\right)_{|\xi|\geq R}$ + combinations linéaires de diverses couches (multiples) portées sur la sphère $|\xi|=R$. Le lemme 2.4. achève la démonstration.

Proposition 3.2

Soit $Q(D)$ *un polynome de dérivation, satisfaisant à l'inégalité de la forme*:

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\left(\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\right)\right|\leq M_\nu\cdot|\xi|^{-|\nu|d},\ \textit{pour}\ |\xi|\geq R, \tag{3.3}$$

alors, pour $\alpha(x)\in\mathcal{D}$ *quelconque fixé, l'application*:

$f\to\alpha(x)[Q(D)f*E_x]$ *est continue de* Ω_d^s *dans lui-même.*

Démonstration. Il suffit de montrer cette propriété pour $E_x=E_1$. Or, $Q(D)f*E_1\xrightarrow[\mathfrak{F}]{}\left(\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\right)_{|\xi|\geq R}\hat{f}(\xi)$, d'où

$$x_1^{\nu_1}\cdots x_n^{\nu_n}[Q(D)f*E_1]\xrightarrow[\mathfrak{F}]{}\sum_{\mu}c_\nu^\mu\left(\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\mu\left(\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\right)\right)_{|\xi|\geq R}\times\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\nu-\mu}\hat{f}(\xi)$$

+combinaisons linéaires de diverses couches portées par $|\xi|=R$.

c. q. f. d.

Enfin,

$$(3.1') \qquad {}^tP(x, D)={}^tP(x_0, D)+\sum {}^tQ_\nu(D)a_\nu(x).$$

D'où, en vertu de la proposition 3.2, le procédé de la construction des paramétrix pour l'opérateurs ${}^tP(x, D)$ est justifié.

Références

[1] F. E. Browder: Regularity theorems for solutions of partial differential equations with variable coefficients, Proc. Nat. Acad. Sci., 234–236 (1957).

[2] L. Hörmander: On the theory of general partial differential operators, Acta Math., **94**, 161–248 (1955).

[3] B. Malgrange: Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques, Bull. Soc. Math. France, **85**, 283–306 (1957).

[4] S. Mizohata: Hypoellipticité des Opérateurs Différentiels Elliptiques, Colloque International du C. N. R. S. sur la Théorie des Équations aux Dérivées Partielles, 165–177 (1957).

[5] ——: Hypoellipticité des équations paraboliques, Bull. Soc. Math. France, **85**, 15–50 (1957).

Note ajoutée pendant la correction des épreuves. M. L. Hörmander a publié sa démonstration au Communication, Pure and Applied Mathematics, **2**, 197–218 (1958).