109. *Erweiterung des Erlanger Programms durch Transformationsgruppenerweiterungen*

Von Tsurusaburo TAKASU

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Oct. 13, 1958)

Die Gruppenparameter sind bis heute ausschliesslich so-genannte variable Konstanten gewesen, so dass die Geometrien des Erlanger Programms (1872) von Felix Klein ausschliesslich gegenüber solchen Transformationsgruppen aufgefasst sind, wenn die Transformationen durch Koordinaten ausgedrückt sind. Die Tangentialräume für die Übertragungsgeometrien sind auch gegenüber solchen Transformationsgruppen aufgefasst. Die Hauptfaserräumen der Hauptfaserbündeln sowie die Gruppenmannigfaltigkeiten der "géométrie de groupes" im Sinne von É. Cartan [1] sind gleichfalls solche Gruppenmannigfaltigkeiten.

Ich habe (T. Takasu [8]) jedoch bemerkt, dass es unendlich viele Transformationsgruppen gibt, bei welchen die Gruppenparameter Funktionen von Koordinaten sind. Im folgenden möchte ich zeigen, dass *das Erlanger Programm F. Kleins durch Erweiterungen der klassischen Transformationsgruppen durch entsprechende Transformationsgruppen, bei denen die Gruppenparameter Funktionen von Koordinaten sind, sich erweitern lässt.*

1. Beispiele von Transformationsgruppen, bei denen die Gruppenparameter Funktionen von Koordinaten sind. Vor allem möchte ich einige konkrete, naheliegende Beispiele genannter Art zeigen.

(i) Polarkoordinaten in der Ebene

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad ds^2=dx^2+dy^2=d\rho^2+\rho^2d\theta^2.$$

Wir setzen: $d\xi=d\rho$, $d\eta=\rho d\theta$, so dass $\xi=\rho$, $\eta=\rho\theta$;

$$dx=d\rho\cos\theta-\rho\sin\theta d\theta=d\xi\cos\theta-d\eta\sin\theta,\quad dy=d\rho\sin\theta+\rho\cos\theta d\theta=d\xi\sin\theta+d\eta\cos\theta,\quad (\theta=\eta/\xi).$$

$$d\xi=dx\cos\theta+dy\sin\theta,\quad d\eta=-dx\sin\theta+dy\cos\theta,\quad (\theta=\tan^{-1}(y/x)).$$

Also erhält man *die Transformationsformeln gewünschter Art*:

$$\xi=x\cos\theta+y\sin\theta+\xi_0,\quad \eta=-x\sin\theta+y\cos\theta+\eta_0,\quad (\theta=\tan^{-1}(y/x)),$$

wo $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ eine Orthogonalmatrix ist, und

$$\xi_0=-\int x(-\sin\theta)d\theta-\int y\cos\theta d\theta=-\int\rho(-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta)\,d\theta=-\int\theta\cdot d\theta=\text{konst.},$$

$$\eta_0=\int x\cos\theta d\theta+\int y\sin\theta\, d\theta=\int\Big(\int d\xi\Big)d\theta=\int\theta\cdot d\theta=\text{konst.}$$

Für $-\infty<\xi<+\infty$, $-\infty<\eta<+\infty$, muss man das Gebiet für (ξ,η) so auffassen, dass das, wegen $(-\infty<\theta<+\infty)$, als eine platt auf der xy-Ebene erdrückte Schraubenfläche aussieht.

Jeder von den Radiusvektoren $\cdots O_{-1}(0,\theta-2\pi)P_{-1}(\rho,\theta-2\pi)$, $O_0(0,\theta)P_0(\rho,\theta)$, $O_1(0,\theta+2\pi)P_1(\rho,\theta+2\pi)$, $O_2(0,\theta+4\pi)P_2(\rho,\theta+4\pi),\cdots$ liegt genau auf dem nächstfolgenden ohne ihn zu treffen im endlichen.

(ii) Polarkoordinaten im Raume

$$x=\rho \sin\theta \cos\varphi,\quad y=\rho \sin\theta \sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta,\quad ds^2=d\rho^2+\rho^2 d\theta^2+\rho^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

Wir setzen: $\xi^1=\rho$, $\xi^2=\rho\theta$, $\xi^3=\rho\sin\theta\cdot\varphi$, so dass $d\xi^1=d\rho$, $d\xi^2=\rho d\theta$, $d\xi^3=\sin\theta\rho d\varphi$ wird, und ist:

$$\theta=\xi^2/\xi^1=\tan^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}/z),\quad \varphi=\xi^3/\xi^1\sin(\xi^2/\xi^1)=\tan^{-1}(y/x).$$

$$dx=d\xi^1\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\cos\varphi d\xi^2+(-\sin\varphi)d\xi^3,\ \text{usw.};$$

$$d\xi^1=dx\sin\theta\cos\varphi+dy\sin\theta\sin\varphi+dz\cos\theta,\ \text{usw.};$$

$$\begin{cases}\xi^1=x\sin\theta\cos\varphi+y\sin\theta\sin\varphi+z\cos\theta+\xi^1_0,\\ \xi^2=x\cos\theta\cos\varphi+y\cos\theta\sin\varphi+z(-\sin\theta)+\xi^2_0,\\ \xi^3=-x\sin\varphi+y\cos\varphi+\xi^3_0,\end{cases}$$

wo $\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{pmatrix}$ eine Orthogonalmatrix ist und

$$\xi^1_0=-\int x(\cos\varphi\cos\theta d\theta-\sin\theta\sin\varphi d\varphi)-\int y(\sin\varphi\cos\theta d\theta+\sin\theta\cos\varphi d\varphi)-\int z(-\sin\theta)d\theta$$

$$=-\int\rho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi-1)\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$-\int\rho(-\sin^2\theta+\sin^2\theta)\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=-\int\theta\cdot d\theta-\int\theta\cdot d\varphi=\text{konst.},$$

$$\xi^2_0=-\int(-x\sin\theta\cos\varphi-y\sin\theta\sin\varphi-z\cos\theta)d\theta-\int(-x\sin\varphi+y\cos\varphi)d\varphi$$

$$=-\int\rho(-\sin^2\theta\cos^2\varphi-\sin^2\theta\sin^2\varphi-\cos^2\theta)d\theta$$

$$-\int\rho(-\sin\theta\cos\varphi\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi)d\varphi$$

$$=-\int\rho(-1)d\theta-\int\rho\cdot 0\cdot d\varphi=\int d\theta\int d\xi^1-\int\rho\cdot 0\cdot d\varphi=\text{konst.},$$

$$\xi^3_0=-\int\rho(-\sin\theta)d\varphi=\int\sin\theta d\varphi\int d\xi^1=\text{konst.}\qquad(d\xi^1=0)$$

2. II-geodätische Linien im euklidischen Raume E^n. Indem wir hyperkomplexe Einheiten γ_l derart, dass

(2.1) $$\gamma_m\gamma_n+\gamma_n\gamma_m=2\delta_{mn},\quad (l, m, n,\cdots=1, 2,\cdots, n)$$

ist, aufnehmen, setzen wir

(2.2) $$dS=\gamma_l\omega^l,\quad \omega^l=\omega^l_m(x^n)dx^m,\quad (l, m, n,\cdots=1, 2,\cdots, n),$$

wo (x^n) rechtwinklige Cartesische Koordinaten im E^n sind und

(2.3) $$|\omega^l_m|\neq 0$$

vorausgesetzt ist. Dann haben wir

(2.4) $$dSdS=ds^2=\omega^l\omega^l=g_{mn}dx^m dx^n,\quad ds=|dS|,$$

(2.5) $$g_{mn}=g_{\underline{mn}}+g_{\underset{\vee}{mn}},\quad g_{\underline{mn}}=\omega^l_m\omega^l_n=g_{\underline{nm}},\quad g_{\underset{\vee}{mn}}=\gamma_p\gamma_q\omega^p_m\wedge\omega^q_n=-g_{\underset{\vee}{nm}},$$

(2.6) $$g^{\underline{mn}}=\Omega^m_l\Omega^n_l.$$

(2.7) $$\Omega^p_l\omega^l_q=\delta^p_q,\quad \Omega^l_n\omega^m_l=\delta^m_n.$$

Wir nehmen durchaus an, dass der euklidische Raum E^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit von der Klasse C^v (entweder $v=$positive ganze rationale Zahl oder $v=\infty$ oder $v=\omega$) ist [6].

Die Identität

(2.8) $$\frac{d}{ds}\frac{\omega^l}{ds}\equiv\omega^l_p\left(\frac{d^2x^p}{ds^2}+\Lambda^p_{mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\right)$$

lässt sich leicht beweisen, wo

(2.9) $$\Lambda^p_{mn}=\Omega^p_l\frac{\partial\omega^l_m}{\partial x^n}\equiv-\omega^l_m\frac{\partial\Omega^p_l}{\partial x^n}.$$

Die Lösung des Extremalproblems $\delta s=0$ in der Mannigfaltigkeit $(\omega^l_m(x^n), x^n)$ ist durch

$$\frac{d}{ds}\frac{\omega^l}{ds}=0 \tag{2.10}$$

gegeben. Das Integral von (2.10) wird zu:

$$\xi^l \equiv \int \frac{\omega^l}{ds} ds = a^l s + c^l, \quad (a^l a^l = 1), \tag{2.11}$$

welche im euklidischen Raume E^n existiert. Wir nennen (2.11) die II-*geodätischen Linien* (*geodätische Linien zweiter Art*). (2.10) wird:

$$\frac{d^2\xi^l}{ds^2} = 0. \tag{2.12}$$

Die Gestalt (2.11) zeigt uns: *die* II-*geodätischen Linien gegenüber Projizieren und Schneiden sich wie gerade Linien verhalten.*

Aus (2.10) kann man ohne Schwierigkeiten herleiten:

$$\frac{dx^n}{ds} = a^l \Omega^n_l \tag{2.13}$$

der II-*geodätischen Linien entlang.*

3. Die erweiterten euklidischen Transformationsgruppen. Die Formeln (2.11) und (2.2) zeigen uns:

$$d\xi^l = \omega^l_m(x^n)dx^m. \tag{3.1}$$

Die Koordinaten (ξ^l) möchte ich die II-*geodätischen rechtwinkligen Koordinaten* nennen. Dabei *ist* $(\omega^l_m(x^n))$ *eine Orthogonalmatrix, welche* ${}_nC_2+n=\frac{n}{2}(n+1)$ *Orthogonalitätsbedingungen genügen.* (3.1) *gibt*:

$$\xi^l = \int a^l_m(x^n)dx^m = a^l_m(x^n)x^m - \int x^m da^l_m(x^n), \quad (\omega^l_m \equiv a^l_m),$$

welche von der Gestalt

$$\xi^l = a^l_m(x^n)x^m + a^l_0, \quad (a^l_0 = \text{konst.}) \tag{3.2}$$

ist, weil *die Gleichung der Struktur* [8, Formel (4.2)] zu

$$\boldsymbol{d}\omega^l \equiv da^l_m(x^n) \wedge dx^m = 0 \tag{3.3}$$

wird, so dass

$$\begin{aligned} \int x^m da^l_m(x^n) &= \int da^l_m(x^n) \int dx^m = \iint \{da^l_m(x^n)dx^m\} \\ &= \iint (da^l_m(x^n) \wedge dx^m) = a^l_0 = \text{konst.} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die erweiterte euklidische Gruppe $(a^l_m(x^n), a^l_0)$ bildet eine Gruppenmannigfaltigkeit [1].

Die aus $(a^l_m(x^n), a^l_0)$ *bestehende Gruppe* $\mathfrak{G}$ *enthält eine aus* $\frac{n}{2}(n+1)$-*parametrigen euklidischen Transformationen mit konstanten Parametern bestehende euklidische Gruppe* $\mathfrak{E}$.

Wir können die Untergruppe $\mathfrak{H}$ derart auffassen, dass

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\mathfrak{H}. \tag{3.5}$$

Wir bezeichnen die Elemente von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{h}_0=1$, $\mathfrak{h}_i$, $(i=1, 2, \cdots)$:

$\mathfrak{H}=\mathfrak{h}_0+\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2+\cdots$. Dann ist $\mathfrak{G}=\mathfrak{h}_0\mathfrak{E}+\mathfrak{h}_1\mathfrak{E}+\mathfrak{h}_2\mathfrak{E}+\cdots$.

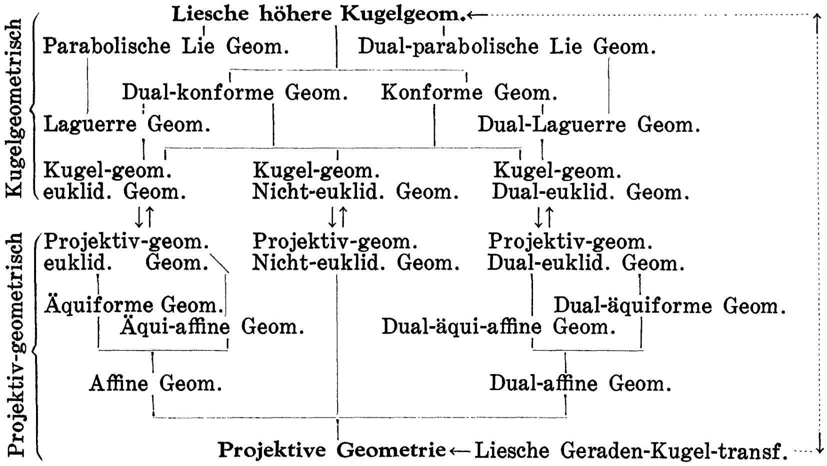
Die Gruppe $\mathfrak{G}$ wollen wir *die durch $\mathfrak{H}$ erweiterte euklidische Gruppe* nennen.

N.B. Das von Otto Schreier ([2]; [8], S. 89) gestellte und gelöste Erweiterungsproblem lautet: *Gegeben sind zwei abstrakte Gruppen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{F}$; gesucht sind alle Gruppen $\mathfrak{G}$, die das $\mathfrak{N}$ als Normalteiler enthalten,* so dass $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}=\mathfrak{F}$.

4. Erweiterung der euklidischen Geometrie durch Erweiterung der euklidischen Gruppe. Jede Transformation $\mathfrak{h}_1=(a^l_m(x^n), a^l_0)$ transformiert den Raum $E^n=E^n_{\mathfrak{h}_0}$ in einen anderen $E^n_{\mathfrak{h}_1}$ und folglich kommt der Gesamtraum $E^n_{\mathfrak{H}}=E^n_{\mathfrak{h}_0}+E^n_{\mathfrak{h}_1}+E^n_{\mathfrak{h}_2}+\cdots$ in Betracht.

Die zur Gruppe $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{E}$ gehörige Geometrie (im Sinne des Erlanger Programms) wollen wir *die durch $\mathfrak{H}$ erweiterte euklidische Geometrie* nennen. *$E^n_{\mathfrak{h}_i}$ ist das Abbild von E^n durch $\mathfrak{h}_i$.*

5. Erweiterung des Erlanger Programms durch Transformationsgruppenerweiterungen. Bis jetzt haben wir uns zur Erweiterung der euklidischen Geometrie beschränkt. Aber *die allgemeine Verfahrungsweise ist, mutatis mutandis, gemeinsam zu allen Zweigen von Geometrie folgender Tabelle*:



6. Beispiel. Eine durch eine polygene Funktion vermittelte konforme Geometrie:

$$z=x+iy,\quad \bar z=x-iy.\quad f(z,\bar z)=\varphi+i\psi;$$

$$\begin{cases}\varphi_x+i\psi_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial z}+\dfrac{\partial f}{\partial \bar z},\\ i\varphi_y-\psi_y=i\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{\partial f}{\partial z}+\dfrac{\partial f}{\partial \bar z};\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{1}{2}(\varphi_x+\psi_y)+\dfrac{i}{2}(\psi_x-\varphi_y),\\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar z}=\dfrac{1}{2}(\varphi_x-\psi_y)+\dfrac{i}{2}(\psi_x+\varphi_y);\end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1f=d_1\varphi+id_1\psi=\left\{\dfrac{1}{2}(\varphi_x+\psi_y)+\dfrac{i}{2}(\psi_x-\varphi_y)\right\}(dx+idy)\\ \quad=\dfrac{1}{2}(\varphi_x+\psi_y)\,dx-\dfrac{1}{2}(\psi_x-\varphi_y)dy+i\left\{\dfrac{1}{2}(\varphi_x+\psi_y)\,dy+\dfrac{1}{2}(\psi_x-\varphi_y)\,dx\right\},\end{cases}$$

$$\left|\begin{aligned} d_2f=d_2\varphi+id_2\psi &=\left\{\frac{1}{2}(\varphi_x-\psi_y)+\frac{i}{2}(\psi_x+\varphi_y)\right\}(dx-idy) \\ &=\frac{i}{2}(\varphi_x-\psi_y)dx+\frac{1}{2}(\psi_x+\varphi_y)+i\left\{-\frac{1}{2}(\varphi_x-\psi_y)dy+\frac{1}{2}(\psi_x+\varphi_y)dx\right\}; \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} d_1f=\dfrac{\partial f}{\partial z}dz: & \text{konforme Abbildung erster Art,} \\ d_2f=\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}: & \text{konforme Abbildung zweiter Art;} \end{cases}$$

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}\neq 0,\quad \psi_{xx}+\psi_{yy}\neq 0 \text{ im allgemeinen,}$$

$$\left.\begin{cases} d\xi^1\equiv\omega^1=\dfrac{1}{2}(\varphi_x+\psi_y)dx-\dfrac{1}{2}(\psi_x-\varphi_y)dy \\ d\xi^2\equiv\omega^2=\dfrac{1}{2}(\psi_x-\varphi_y)dx+\dfrac{1}{2}(\varphi_x+\psi_y)dy \end{cases}\right\}: \text{ konforme Orthogonaltransformation.}$$

Hieraus ergeben sich Formeln von den Gestalten:

$$\xi^1=a_1^1(x,y)x+a_2^1(x,y)y+a_0^1,\quad \xi^2=a_1^2(x,y)x+a_2^2(x,y)y+a_0^2,$$

wobei $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$ eine Orthogonalmatrix ist:

$$\begin{cases} \omega^1=a^1ds, & a^1=1,\ a^2=0: & d\xi^1=\omega^1=ds_1, \\ \omega^2=a^2ds, & a^1=0,\ a^2=1: & d\xi^2=\omega^2=ds_2; \end{cases}$$

ξ^1-Achse, ξ^2-Achse: II-geodätisch:

$$\left.\begin{cases} d\eta^1\equiv\bar{\omega}^1=\dfrac{1}{2}(\varphi_x-\psi_y)dx+\dfrac{1}{2}(\psi_x+\varphi_y)dy \\ d\eta^2\equiv\bar{\omega}^2=\dfrac{1}{2}(\psi_x+\varphi_y)dx-\dfrac{1}{2}(\varphi_x-\psi_y)dy \end{cases}\right\}: \text{ konforme Orthogonaltransformation.}$$

Hieraus ergeben sich Formeln von den Gestalten:

$$\eta^1=b_1^1(x,y)x+b_2^1(x,y)y+b_0^1,\quad \eta^2=b_1^2(x,y)x+b_2^2(x,y)y+b_0^2,$$

wobei $\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}$ eine Orthogonalmatrix ist.

$$\begin{cases} \bar{\omega}^1=\bar{a}^1ds. & \bar{a}^1=1,\ \bar{a}^2=0: & d\eta^1=\bar{\omega}^1=d\bar{s}_1, \\ \bar{\omega}^2=\bar{a}^2ds. & \bar{a}^1=0,\ \bar{a}^2=1: & d\eta^2=\bar{\omega}^2=d\bar{s}_2, \end{cases}$$

η^1-Achse, η^2-Achse: II-geodätisch.

7. Weitere Problemestellung

I. Die Strukturgruppen als Hauptfaserraum in der Übertragungstheorie im Grossen von S. S. Chern und C. Ehresmann bestehen aus Transformationen mit konstanten Parametern (a_μ^l). Wenn die $(a_\mu^l(x^\nu))$ Funktionen von Koordinaten (x^ν) sind, dann *wird die Übertragungstheorie im Grossen erweitert.* Dabei können die $a_\mu^l(x^\nu)$ einerseits konstante Parameter enthalten. Andererseits stellt $(a_\mu^l(x^\nu))$ eine *Teilmannigfaltigkeit der Gruppenmannigfaltigkeit* $\mathfrak{G}$ *dar.* In diesem Sinne stellt die genannte Erweiterung ein ganz *neues Problem.*

II. In den Geometrien von Gruppen (É. Cartan [1]) bestehen die Elemente aus konstanten Parametern. *Erweitert man diese Elemente durch Funktionen von Koordinaten, so entstehen neue Arten von Geometrien von Gruppen* (vgl. [11]).

8. Formuliereung der neuen Relativitätstheorie T. Takasus als eine drei-dimensionale erweiterte Laguerresche Geometrie. Ich habe [10] die allgemeine Relativitätstheorie A. Einsteins, in welcher der Momentumvektor der Bahn der freien Partikel nicht tangentiell parallel ist, durch eine neue Theorie ersetzt, indem ich die II-geodätischen Kugelflächen als Aktionsfunktionsfronten als Raumelemente aufnahm. Die neue Theorie ist als eine drei-dimensionale Laguerresche Hauptfaserbündelgeometrie aufgefasst, der Hauptfaserraum (Strukturgruppe) aus Momentum-Potentialfeld bestehend.

Nun, was auf dasselbe hinaus kommt, *kann man die genannte neue Relativitätstheorie T. Takasus,* welche Prof. J. I. Horváth (Szeged) als eine zulässige Theorie im "Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete" (1958) referiert hat, *als eine erweiterte drei-dimensionale Laguerresche Geometrie auffassen, welche im Erlanger Programm aufs neue Platz nimmt.*

Referenzen

[1] É. Cartan: La géométrie des groupes de transformations, Journal de Mathématiques Pupes et Appliquées, **6**, fasc. 1, 1–119 (1927).

[2] Otto Schreier: Über die Erweiterung von Gruppen: Teil I, Monatshefte für Mathematik u. Phys., **34** (1934). Teil II. Hamburger Abhandlungen, **4**, 321 (1934).

[3] H. Zassenhaus: Lehrbuch der Gruppentheorie (1937).

[4] C. Ehresmann: Les Connexions Infinitésimales dans un Espace Fibré Différentiable, Colloque de Topologie, Bruxelles (Espaces Fibrés), 29–55 (1950).

[5] S. S. Chern: Differentiable manifolds, Lecture note, Chicago University (1953).

[6] A. Lichnerowicz: Théorie Globale des Connexions et des Groupes d'Holonomie, Edizioni Cremonese, Roma (1956).

[7] T. Takasu: Connection spaces in the large. X, A new view on the relation between the "Erlanger Programm" and the linear connections, Yokohama Math. Jour., **2**, 81–94 (1954).

[8] T. Takasu: Non-connection methods for the theory of principal fibre bundles as almost Kleinean geometries, Proc. Japan Acad., **33**, 515–520 (1957).

[9] T. Takasu: Global differential geometries of principal fibre bundles in the forms of almost kleinean geometries by non-connection methods. I, Yokohama Math. Jour., **6**, 1–78 (1958).

[10] T. Takasu: Die endgültige, kugelgeometrische Relativitätstheorie, welche als eine Faserbündelgeometrie aufgefasst ist, Yokohama Math. Jour., **4**, 119–146 (1956).

[11] Paul Dedecker: Extension du Groupe Structural d'un Espace Fibré, Colloque de Topologie de Strasbourg, 1954–1955, Institut de Mathématique, Université de Strasbourg (Vgl. Ref. v. S. T. Hu, Math. Rev., **15**, 302 (1958)).