159. Le Problème de Cauchy pour le Passé pour Quelques Équations Paraboliques

Par Sigeru MIZOHATA
Université de Kyôto

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 12, 1958)

1. *Introduction.* On va envisager les équations anti-paraboliques de la forme:

$$(1,1)\quad \Big(\frac{d}{dt}+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x,t)\Big)u(x,t)=0$$

où les coefficients $a_{ij}(x,t)$ sont à valeurs réelles, et

$$(1,2)\qquad \sum a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geq\delta^2|\xi|^2,\ \delta>0,\ \text{pour } x\in R^n,\ 0\leq t\leq h.$$

Notre but est de démontrer que l'équation d'évolution (1,1) a *au plus* une solution pour le problème de Cauchy pour l'avenir.[1] Ce résultat est une conséquence immédiate de [7]. Notre résultat est limité à l'équation (1,1), et pour des équations paraboliques plus générales, la question est hors de notre portée.

2. Pour simplifier le raisonnement, on suppose que les coefficients $a_{ij}(x,t)$ sont des fonctions continuement différentiables en t à valeurs dans $\mathscr{B}$;[2] les autres coefficients sont mesurables et bornés. D'après le lemme de Gårding (voir [4, pp. 123–126]), il existe une constante $\beta>0$ telle que,

$$(2,1)\qquad \|(A(x,t,D)-\beta)u\|_{L^2}\geq\frac{\delta}{2}\|(1-\Delta)u\|_{L^2}$$

pour toute $u(x)\in\mathscr{D}^2_{L^2}$, où $A(x,t,D)=\sum a_{ij}(x,t)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$, $0\leq t\leq h$.

(1,1) deviendra alors, en désignant

$$(2,2)\qquad \sigma(P(t))=A(x,t,iz)|z|^{-2},$$

$$(2,3)\qquad \frac{d}{dt}u(t)+(P(t)\Lambda^2-\beta)u(t)=B(u).$$

On a alors (voir [7, Lemme 2,1]) le

Lemme 2,1. *Soit $u(t)$, $0\leq t\leq h$, une fonction continuement différentiable en t à valeurs dans L^2 telle que $\Lambda^2u(t)$ soit continue.*[3] *On suppose que $u(t)$ s'annule à $t=0$ mais ne s'annule identiquement dans*

---

1) Dans le cas où les coefficients sont indépendants de t, ce problème est résolu par K. Yosida [8], voir aussi [1].

2) Pour le Théorème, on n'a qu'à supposer $\mathscr{B}^3$ au lieu de $\mathscr{B}$; $\mathscr{B}^3$ est l'espace des fonctions 3 fois continuement différentiables bornées avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre 3, muni de la norme: $\sum_{|\alpha|\leq 3}\sup_x|D^\alpha f(x)|$.

3) Cela équivaut à dire que toutes les dérivées spatiales de $u(t)$ d'ordre≤ 2, sont continues en t à valeurs dans L^2.

aucun voisinage de $t=0$, *on a alors*

$$\text{(A)}\qquad J_n=\int_0^h \varphi_n^2\left\|\frac{d}{dt}u(t)+[P(t)\Lambda^2-\beta]u(t)\right\|^2 dt$$
$$\geq(\rho-1)^2I^2+I^2/n-\sigma\left(\frac{I^2}{n}\right)-o\left(\frac{\rho I^2}{n}\right),$$

où $I^2=\int_0^h \varphi_n'^2\|u\|^2dt,\ \ \rho^2I^2=\int_0^h \varphi_n^2\|(P(t)\Lambda^2-\beta)u\|^2dt.$

Pour la démonstration, on utilise le

Lemme 2,2. *Soit* H *un opérateur d'intégrale singulière tel que* $\sigma(H)=h(x,z)\in C_\beta^\infty$, *on peut alors exprimer*

1) $\Lambda^pH=H\Lambda^p+H_1\Lambda^{p-1}+H_0$,

2) $\Lambda^pH^*=H^*\Lambda^p+H_1'\Lambda^{p-1}+H_0'$, si $\beta\geq p+n+1$,[4)]

où H_1, H_0, H_1', H_0' *sont des opérateurs bornés de* L^2 *dans lui-même.*

Démonstration. Limitons-nous à démontrer 1), car 2) se démontre de la même manière. Dans le cas où p est pair, la démonstration est très simple. Notre démonstration—qui est un peu compliquée—est donc essentiellement consacrée au cas où p est impair. Soit

$$\sigma(H)=a_0(x)+\sum_{n\geq 1}a_{nm}(x)Y_{nm}(\xi).\quad \text{(on désigne } \xi \text{ au lieu de } z).$$

Occupons-nous du cas simple: $\sigma(H)=a(x)Y(\xi)$, où $Y(\xi)$ est l'un des $Y_{nm}(\xi)$.

Dans ce cas, $(\Lambda^pH-H\Lambda^p)f=(\Lambda^pa(x)Y-a(x)Y\Lambda^p)f=(\Lambda^pa(x)-a(x)\Lambda^p)Yf$.

Posons

$$\text{(2,4)}\qquad Yf=\varphi(x).$$

En décomposant, $\hat{\Lambda}(\xi)^p\equiv|\xi|^p=\alpha(\xi)|\xi|^p+[1-\alpha(\xi)]|\xi|^p=\hat{\Lambda}_1^p(\xi)+\hat{\Lambda}_2^p(\xi)$, où $\alpha(\xi)\in\mathcal{D}$ est une fonction qui vaut 1 au voisinage de l'origine. Notons que dans la notation $\hat{\Lambda}_i^p(\xi)$, p ne signifie plus la $p^{\text{ième}}$ puissance. Notons la distribution $\Lambda_i^p\to\hat{\Lambda}_i^p(\xi)$. En décomposant alors l'expression plus haut en

$$\text{(2,5)}\qquad (\Lambda_1^pa(x)-a(x)\Lambda_1^p)+(\Lambda_2^pa(x)-a(x)\Lambda_2^p),$$

on voit que le premier terme est un opérateur borné; plus précisément,

$$\text{(2,6)}\qquad \|\Lambda_1^pa(x)\varphi\|,\ \|a(x)\Lambda_1^p\varphi\|\leq\sup_x|a(x)|\cdot\sup_\xi|\hat{\Lambda}_1^p(\xi)|\cdot\|\varphi\|.$$

Envisageons le deuxième terme:

$$\text{(2,7)}\qquad (\Lambda_2^pa(x)-a(x)\Lambda_2^p)\cdot\varphi(x)=\int\Lambda_2^p(x-y)[a(y)-a(x)]\varphi(y)\,dy$$

où l'intégrale est à prendre au sens de distribution.

Développons $a(y)-a(x)$ autour du x:

$$a(y)-a(x)=\sum_{|\nu|\leq m-1}\frac{D^\nu a(x)}{\nu!}(y-x)^\nu+\sum_{|\nu|=m}\frac{a_\nu(x,y)}{\nu!}(y-x)^\nu,$$

où m est un entier que nous allons déterminer (pour la démonstration

4) Dans le cas où p est pair, $\beta\geq p+1$. Notons que ces conditions sont des conditions suffisantes (on pourrait les améliorer).

détaillée, voir [6, pp. 223–227]).

(2,7) s'écrit

$$\sum_{|\nu|\leq m-1} \frac{D^\nu a(x)}{\nu!} \int (y-x)^\nu \Lambda_2^p(x-y)\varphi(y)dy$$
$$+\sum_{|\nu|=m} \int \frac{a_\nu(x,y)(y-x)^\nu}{\nu!} \Lambda_2^p(x-y)\varphi(y)dy.$$

Envisageons la première partie:

$$x^\nu \Lambda_2^p(x) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\nu|} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\nu [1-\alpha(\xi)]\,|\xi|^p = \hat{\phi}_\nu(\xi)\,|\xi|^{p-1},$$

donc la première partie s'écrit

$$\sum_{|\nu|\leq m-1} (-1)^{|\nu|} \frac{D^\nu a(x)}{\nu!} \phi_\nu \cdot \Lambda^{p-1}\varphi. \tag{2,8}$$

Passons à la deuxième:

$$\varphi_\nu(x) = \int a_\nu(x,y)(x-y)^\nu \Lambda_2^p(x-y)\varphi(y)dy = \int_{|x-y|\leq 1} \cdots dy + \int_{|x-y|\geq 1} \cdots dy = \varphi_\nu^1(x) + \varphi_\nu^2(x),$$

$$|\varphi_\nu^1(x)| \leq \sup_{x,y} |a_\nu(x,y)| \times \int_{|x-y|\leq 1} |(x-y)^\nu \Lambda_2^p(x-y)|\,|\varphi(y)|dy, \quad \text{d'où}$$

$$\|\varphi_\nu^1(x)\| \leq \sup_{x,y} |a_\nu(x,y)| \cdot \sup_{|x|\leq 1} |x^\nu \Lambda_2^p(x)| \cdot B_n \cdot \|\varphi\|, \tag{2,9}$$

où B_n est le volume de la boule unité dans R^n. Prenons m,

(2,10) $|\nu| = m = p+n+1$, alors

$$\sup_x |x^\nu \Lambda_2^p(x)| \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{|\nu|} \int \left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\nu \hat{\Lambda}_2^p(\xi)\right| d\xi < +\infty.$$

Quant à $\varphi_\nu^2(x)$,

(2,11) $\|\varphi_\nu^2(x)\| \leq \left(\int_{|x|\geq 1} |x^\nu \Lambda_2^p(x)|\,dx\right) \|\varphi\|$, et on voit facilement que l'intégrale est finie. c.q.f.d.

Preuve du Lemme 2,1.

D'abord,

$$\int_0^h \varphi_n^2 \|\Lambda u\|^2 dt = o\left(\frac{\rho I^2}{n}\right), \tag{2,12}$$

car $\displaystyle\int_0^h \varphi_n^2 \|\Lambda u\|^2 dt \leq \left(\int_0^h \varphi_n^2 \|\Lambda^2 u\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^h \varphi_n^2 \|u\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$

Ensuite,

$$[P\Lambda^2\varphi u, (\varphi u)'] + [(\varphi u)', P\Lambda^2\varphi u] = [\varphi u, P\Lambda^2\varphi u]' - [\varphi u, P'(t)\Lambda^2\varphi u]$$
$$+ [(P\Lambda^2 - \Lambda^2 P^*)\varphi u, (\varphi u)'].$$

Or, d'après le Lemme 2,2,

$$P\Lambda^2 - \Lambda^2 P^* = P\Lambda^2 - P^*\Lambda^2 + P_1\Lambda + P_0 = (P-P^*)\Lambda^2 + P_1\Lambda + P_0,$$

d'où

$$\left|\int_0^h [(P\Lambda^2 - \Lambda^2 P^*)\varphi u, (\varphi u)']dt\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^h \|(\varphi u)'\|^2 dt + c\int_0^h \varphi^2 \|\Lambda u\|^2 dt$$
$$+ c\int_0^h \varphi^2 \|u\|^2 dt.$$

c.q.f.d.

Les inégalités (voir [7]),

(B) $$J_n \geq c(u)\frac{\rho^2 I^2}{n},$$

(C) $$J_n \geq I^2/2n,$$

donnent

$$J_n \geq \frac{\delta^2}{4} \cdot \frac{c(u)}{n} \int_0^h \varphi_n^2 \| \Lambda^2 u \|^2 dt;$$

(2,13) $$J_n \geq \frac{1}{2n} \int_0^h \varphi_n'^2 \| u \|^2 dt \geq nM(n) \int_0^h \varphi_n^2 \| u \|^2 dt,\ M(n) \to +\infty (n \to +\infty).$$

Ces deux inégalités entraînent

(2,14) $$J_n \geq M'(n) \int_0^h \varphi_n^2 \| \Lambda u \|^2 dt,$$

où $M'(n)$ est une suite tendant vers $+\infty$ avec n.

Les inégalités (2,13) et (2,14) contredisent l'hypothèse que la solution ne s'annule identiquement dans aucun voisinage de $t=0$. Nous avons donc

Théorème. *Soit $u(t)$, $0 \leq t \leq h$, une solution de l'équation* (1,1), *continuement différentiable en t à valeurs dans L^2 telle que $\Lambda^2 u(t)$ soit continue.*[3] *Si $u(0)=0$, alors $u(t)$ doit s'annuler identiquement dans un voisinage de $t=0$.*

Remarque. L'espace L^2 n'est pas essentiel pour démontrer le Théorème. Le Théorème est encore vrai pour plusieurs espaces. En effet, dans l'espace $\mathcal{D}'^m_{L^2}$ (espace dual de $\mathcal{D}^m_{L^2}$), m entier positif, le Théorème est vrai (voir [5]). On peut dire même dans l'espace suivant: $\frac{1}{(1+r^2)^k} u \in \mathcal{D}'^m_{L^2}$, k étant un entier >0 quelconque fixé.

Références

[1] S. Itô and H. Yamabe: A unique continuation theorem for solutions of a parabolic differential equation, J. Math. Soc. Japan, **10**, 314-321 (1958).

[2] A. P. Calderón: Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. Jour. Math., **80**, 16-36 (1958).

[3] F. John: Numerical solution of the equation of heat conduction for preceding times, Annali Math. Pura Appl., ser. 4, **40**, 129-142 (1955).

[4] J. Leray: Hyperbolic differential equations, Cours de Princeton (1954).

[5] S. Mizohata: Problème de Cauchy pour les équations paraboliques, J. Math. Soc. Japan, **8**, 269-299 (1956).

[6] ——: Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, Mem. Coll. Sci., Kyoto Univ., ser. A, **31**, 219-239 (1958).

[7] ——: Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du quatrième ordre, Proc. Japan Acad., **34**, 687-692 (1958).

[8] K. Yosida: On the differentiability of semi-groups of linear operators, Proc. Japan Acad., **34**, 337-340 (1958).