# 24. *Sur la Condition Frontière dans le Problème de Dirichlet pour les Equations Semi-linéaires du Type Elliptique et du Second Ordre*

Par Seturo SIMODA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., March 12, 1959)

Plusieurs auteurs montrèrent que la régularité et l'irrégularité des points frontières du domaine par rapport aux équations linéaires du type elliptique et du second ordre, qui sont là prescrites, est immuable pour le choix de l'équation.[1] On peut donc toujours traiter dans un domaine borné quelconque le problème de Dirichlet au sens restreint pour les équations linéaires du type elliptique avec les données frontières continues arbitraires, moyennant que tous points frontières soient réguliers pour ce domaine seulement par rapport à l'équation de Laplace $\Delta u=0$.

Nous allons montrer, bien plus, que telle circonstance est suffisante pour le traiter pour la vaste classe des équations semi-linéaires avec les données frontières continues arbitraires, obtenant les solutions qui se prêtent à la condition frontière donnée au sens restreint; c'est-à-dire sous telle circonstance on peut construire en tous points frontières les barrières pour toutes équations de tel genre.

W. Püschel démontra en 1932 un grand théorème comme ce qui suit:[2]

THÉORÈME 1. Soit

$$(\mathrm{L}) \qquad Lu=\sum_{i,j=1}^{n}\partial_i\{a_{ij}(x)\partial_j u\}=0$$

une équation linéaire homogène et auto-adjointe à coefficients $a_{ij}$ prescrits et différentiables jusqu'au second ordre inclus dans un domaine borné $d\subset R^n$, tous les dérivées secondes là continues au sens de Hölder; la matrice $(a_{ij}(x)$: $i, j=1, 2,\cdots, n)$ est supposée symétrique et définie positive uniformément pour tout $x\in d$.

Alors, la frontière $\partial d$ se partage en trois parties disjointes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{A}$, la totalité des *point réguliers*, est formée des points $s\in\partial d$

1) Werner Püschel: [1] Die erste Randwertaufgabe der allgemeinen selbstadjungierten elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung im Raum für beliebige Gebiete, Math. Z., **34**, 535-553 (1932); Georg Tautz: [1] Zur Theorie der elliptischen Differentialgleichungen. I, Math. Annalen, **117**, 694-726 (1941); ——: [2] Zur Theorie der elliptischen Differentialgleichungen. II, Math. Annalen, **118**, 733-770 (1941); ——: [3] Zur Theorie der ersten Randwertaufgabe, Math. Nachr., Berlin, **2**, 279-303 (1949); O. A. Olejnik: [1] On the Dirichlet problem for equations of elliptic type, Mat. Sbornik, N. S., **24** (66), 3-14 (1949); Nous avons vu Tautz [3] et Olejnik [1] seulement dans Math. Review ou Zentralblatt für Math.

2) Voir Püschel [1].

tels que, pour n'importe quelle fonction frontière continue $f$, la solution généralisée (au sens de Wiener) $u$ de (L) correspondante à $f$ converge vers la valeur $f(s)$ quand $x \in d$ tend vers $s$ par le chemin arbitraire dans $d$; $\mathfrak{B}$, la totalité des *points irréguliers*, est composée des points $s \in \partial d$ tels que, pour au moins une $f \in \boldsymbol{C}(\partial d)$ et pour au moins une suite des points $\{x^{(m)}: m=1, 2, \cdots\} \subset d$ tendant vers $s$, la solution (au sens de Wiener) $u$ de (L) correspondante à $f$ présente l'aspect

$$\lim_{m \to +\infty} u(x^{(m)}) \neq f(s);$$

$\mathfrak{C}$ est la réunion de tous ensembles $\subseteqq \partial d$ sur lesquels les valeurs $f(s)$ de chaque donnée frontière bornée $f$ n'exercent rien d'influence sur la solution (au sens de Wiener) $u$ de (L) correspondante à $f$.

Au reste, cette partition de $\partial d$ est indépendante du premier membre de (L).

Grâce à ce théorème, dès que tous points frontières seront réguliers pour $d$ par rapport à l'équation de Laplace $\Delta u=0$, ils le seront encore par rapport à l'équation (L) quelconque, de sorte que

(1) pour n'importe quelle $f \in \boldsymbol{C}(\partial d)$, il existe une et une seule solution $u \in \boldsymbol{C}(\bar{d}) \frown \boldsymbol{C}^2(d)$ de (L), remplissent $u \equiv f$ sur $\partial d$ entier,

(2) il existe la fonction de Green de la première espèce $G(x, \xi)$ pour (L) dans $d$, qui tend vers 0 pour $x \to \partial d$, quel que soit $\xi$ fixe dans $d$, et

(3) si l'on pose

$$\Psi_1(x) = \int_d G(x, \xi) d\xi,$$

c'est la solution de l'équation $Lu=-1$ dans $d$, appartenante à $\boldsymbol{C}(\bar{d}) \frown \boldsymbol{C}^2(d)$ et s'évanouissant sur $\partial d$.

Or, nous allons faire un pas en avant.

THÉORÈME 2. **Hypothèses:** Soint $d$ un domaine borné $\subset R^n$ $(n \geqq 2)$,

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \partial_{ij}^2 u + \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \partial_k u$$

une forme différentielle linéaire à coefficients $a_{ij}$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$ et $b_k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ prescrits dans $d$ entier et assujettis aux deux conditions suivantes:

[1] la matrice $(a_{ij}(x): i, j=1, 2, \cdots, n)$ est symétrique pour tout $x \in d$ et définie positive uniformément par rapport à $x \in d$ (*uniformément elliptique*); c'est-à-dire il existe une constante $\alpha > 0$ telle qu'on ait

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \tau_i \tau_j \geqq \alpha$$

pour tout $x \in d$ et pour tout vecteur unitaire réel $\tau=(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$.

[2] $a_{ij}$ et $b_k$ $(i, j, k=1, 2, \cdots, n)$ sont tous continus et bornés dans $d$.

On suppose, ensuite, que,

[3] il existe $\Psi_1 \in \boldsymbol{C}(\bar{d}) \frown \boldsymbol{C}^2(d)$ telle que $\Psi_1 \equiv 0$ sur $\partial d$ entier et remplit l'inégalité $Au \leqq -1$ partout dans $d$.

On envisage alors une équation semi-linéaire

$$Au(x) = F(x, u(x), \nabla u(x))$$

avec $F(x, u, p)$ qui est prescrite et continue en tout point $(x, u, p) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, u, p_1, p_2, \cdots, p_n)$ de la région

$$\Re = \{(x, u, p) \colon x \in d \text{ et } (u, p) \in R^{n+1}\}$$

et supposée assujettie à la condition

[4] pour n'importe quelle paire des constantes $M$, $P$ avec $-\infty < M < 0 < P < +\infty$, on peut trouver des constantes $\beta = \beta(M, P) \geqq 0$ et $\gamma = \gamma(M, P) \geqq 0$ telles qu'on ait

$$|F(x, u, p)| \leqq \beta |p|^2 + \gamma$$

pour tout $(x, u, p)$ appartenant à la région

$$\Re_{MP} = \{(x, u, p) \colon x \in d,\ M \leqq u \leqq P \text{ et } p \in R^n\}.$$

**Conclusion.** Pour n'importe quelle fonction frontière bornée $\varphi$, pour n'importe quel point $\Xi \in \partial d$ et pour n'importe quelles constantes $\varepsilon > 0$, $\mu_s$ et $\mu_i$ on peut trouver un domaine $V$ contenant $\Xi$ avec $d \frown \partial V \neq$ vide et des fonctions $\bar{\omega}$ et $\underline{\omega} \in \boldsymbol{C}^2(d \frown V)$ telle qu'on ait

(i) $\limsup_{x \to \Xi} \bar{\omega}(x) < \varphi^*(\Xi) + \varepsilon$ ($x$ parcourt $d \frown V$)[3]

$\liminf_{x \to \Xi} \underline{\omega}(x) > \varphi_*(\Xi) - \varepsilon$ ($x$ parcourt $d \frown V$)

(ii) $\liminf_{\substack{x \to s \\ (x \in d \frown V)}} \bar{\omega}(x) > \varphi(s)$, $\limsup_{\substack{x \to s \\ (x \in d \frown V)}} \underline{\omega}(x) < \varphi(s)$

quel que soit $s \in \bar{V} \frown \partial d$

(iii) $\liminf_{\substack{x \to y \\ (x \in d \frown V)}} \bar{\omega}(x) > \mu_s$, $\limsup_{\substack{x \to y \\ (x \in d \frown V)}} \underline{\omega}(x) < \mu_i$

quel que soit $y \in d \frown \partial V$ et

(iv) $\left.\begin{array}{l} A\bar{\omega}(x) < F(x, \bar{\omega}(x), \nabla \bar{\omega}(x)) \\ A\underline{\omega}(x) > F(x, \underline{\omega}(x), \nabla \underline{\omega}(x)) \end{array}\right\}$ dans $d \frown V$ entier.

*Preuve.* Soit $\Xi$ le point générique de $\partial d$; $\varepsilon > 0$, $\mu_s$ et $\mu_i$ étant données à volonté; et soit $\varphi$ une fonction bornée arbitrairement prescrite sur $\partial d$.

Posons

$$\varphi_s = \max[\max[\varphi^*(s) \colon s \in \partial d], 0]$$

$$\varphi_i = \min[\min[\varphi_*(s) \colon s \in \partial d], 0].$$

On suppose, sans perdre la généralité, que

$$\mu_s > \varphi_s \quad \text{et} \quad \mu_i < \varphi_i.$$

Il existe, de plus, un $\delta > 0$ tel que $|s - \Xi| < \delta$ entraîne

3) $\varphi^*(s)$ et $\varphi_*(s)$ sont définies comme suit:

$$\varphi^*(s) = \limsup_{\substack{x \to s \\ (x \in \partial d)}} \varphi(x), \qquad \varphi_*(s) = \liminf_{\substack{x \to s \\ (x \in \partial d)}} \varphi(x).$$

$$\varphi(s) \leqq \varphi^*(\Xi)+\varepsilon/2,$$

et tel que la frontière de l'hypersphère centrée sur $\Xi$ et de rayon $\delta$ ait des points communs avec $d$.

Posons

$$\Phi(x)=|x-\Xi|^2/\delta^2,$$

ce qui est $\in \boldsymbol{C}^2(R^n)$; $\Phi(\Xi)=0$, et si $|x-\Xi|=\delta$, on a $\Phi(x)=1$ évidemment. Poson encore

$$\Psi=\theta\Psi_1+\Phi \qquad (\theta>0).$$

Il est aisé de voir que $0<\Phi$ sur $\bar{d}$ sauf en $x=\Xi$ et $0<\Psi_1$ dans $d$ entier.

Prenons un $C>0$ tel que $C>\mu_s-\mu_i$, et deux constantes $M$, $P$ telles que

$$-\infty<M<\mu_i-C-\varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \mu_s+C+\varepsilon/2<P<+\infty;$$

soient $\beta=\beta(P, M)$ et $\gamma=\gamma(P, M)$.

On traite principalement $\bar{\omega}$.

Par le choix des deux constantes $\lambda>0$ et $\theta>0$ telles que

$$0<\lambda\leqq 1/2, \quad \beta C\lambda<\alpha/2 \quad \text{et} \quad 2(\sigma/\delta^2+B/\delta)+\gamma/C\lambda<\theta$$

avec

$$\sigma=\text{sup de } \textstyle\sum_{i=1}^n a_{ii}(x) \quad \text{pour tout } x\in d$$

et

$$B=\text{sup de } \sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^n \{b_k(x)\}^2} \quad \text{pour tout } x\in d,$$

la fonction

$$\bar{\omega}(x)=C\{\Psi(x)\}^\lambda+\varphi^*(\Xi)+\varepsilon/2$$

est complètement déterminée.

On calcule sans peine

$$\partial_i(\Psi^\lambda)=\lambda\Psi^{\lambda-1}\cdot\partial_i\Psi$$
$$\partial_{ij}^2(\Psi^\lambda)=\lambda\{(\lambda-1)\Psi^{\lambda-2}\cdot\partial_i\Psi\cdot\partial_j\Psi+\Psi^{\lambda-1}\cdot\partial_{ij}^2\Psi\}$$
$$\nabla(\Psi^\lambda)=\lambda\Psi^{\lambda-1}\cdot\nabla\Psi$$

et par suite, dans $d\frown U_\delta(\Xi)$,

$$\begin{aligned} A\bar{\omega}=C\cdot A\{\Psi^\lambda\}&=C\lambda\{(\lambda-1)\Psi^{\lambda-2}\cdot\textstyle\sum a_{ij}\cdot\partial_i\Psi\cdot\partial_j\Psi+\Psi^{\lambda-1}\cdot A\Psi\} \\ &\leqq C\lambda\Psi^{\lambda-2}\{-\alpha(1-\lambda)|\nabla\Psi|^2+\Psi\cdot(\theta\cdot A\Psi_1+A\Phi)\} \\ &\leqq -C\lambda\Psi^{\lambda-2}\{(\alpha/2)|\nabla\Psi|^2+\Psi\cdot(\theta-2\sigma/\delta^2-2B/\delta)\} \end{aligned}$$

vu la condition [1] et $\Psi>0$ dans $d$ et le choix de $\lambda$.

On va maintenant déterminer le domaine $V$ comme suit.

Soient

$$U=U_\delta(\Xi)=\{x\colon |x-\Xi|<\delta\}$$
$$\mathfrak{N}=\{x\in U\frown d\colon \Psi(x)\geqq 1\};$$

$\mathfrak{N}$ est un sous-ensemble fermé de $U$; et donc $U-\mathfrak{N}$ est un ouvert contenant un voisinage de $\Xi$. Prenons pour $V$ le plus grand domaine $\subseteq U-\mathfrak{N}$ contenant $\Xi$.

Or, dans $d\frown V$, on calcule, en tenant compte de ce que là $0<\Psi<1$ et $M<\bar{\omega}<P$,

$$\begin{aligned} A\bar{\omega}(x)-F(x, \bar{\omega}(x), \nabla\bar{\omega}(x))&\leqq A\bar{\omega}+\beta|\nabla\bar{\omega}|^2+\gamma \\ &\leqq \beta(C\lambda\Psi^{\lambda-1}\cdot|\nabla\Psi|)^2+\gamma-C\lambda\Psi^{\lambda-2}\{(\alpha/2)|\nabla\Psi|^2+\Psi\cdot(\theta-2\sigma/\delta^2-2B/\delta)\} \\ &\leqq C\lambda\Psi^{\lambda-2}\cdot|\nabla\Psi|^2(\beta C\lambda-\alpha/2)+C\lambda\Psi^{\lambda-1}(\gamma/C\lambda+2\sigma/\delta^2+2B/\delta-\theta)<0; \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\bar{\omega}$ remplit (iv) dans $d_\frown V$.

Si $y \in d_\frown \partial V$, il doit être $\Psi(y)=1$; donc

$$\bar{\omega}(y)=C+\varphi^*(\Xi)+\varepsilon/2>\mu_s-\mu_i+\varphi^*(\Xi)+\varepsilon/2>\mu_s;$$

c'est ce qui montre l'assujettissement de $\bar{\omega}$ à la condition (iii).

Si $s \in \bar{V}_\frown \partial d$, on a

$$\Psi(s)=\Phi(s)=|s-\Xi|^2/\delta^2>0;$$

et donc, grâce au choix de $\delta$,

$$\bar{\omega}(s)=C\{\Phi(s)\}^\lambda+\varphi^*(\Xi)+\varepsilon/2>\varphi^*(\Xi)+\varepsilon/2\geqq\varphi(s);$$

c'est ce qui montre l'assujettissement de $\bar{\omega}$ à la condition (ii). Celui à la condition (i) est évident.

Un résultat immédiate de ce théorème est ce qui suit.

THÉORÈME 3. Si peu que tous points frontière de $d$ soient réguliers pour $d$ par rapport à l'équation de Laplace $\Delta u=0$, on peut construire en chaque point de $\partial d$ les barrière-sousfonctions et les barrière-surfonctions[4] pour l'équation

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u=F(x, u, \nabla u)$$

pourvu que $a_{ij}$ et $F$ satisfassent aux conditions données au théorème précédent.

En effet, on peut récrire l'équation comme ceci:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_j u)=\tilde{F}(x, u, \nabla u),$$

où

$$\tilde{F}=F+\sum(\partial_i a_{ij})\cdot\partial_j u;$$

et $\tilde{F}$ satisfait à la même condition que $F$ elle-même.

4) Voir E. F. Bechenbach and L. K. Jackson: Subfunctions of several variables, Pacific J. Math., **3**, 291-313, Theorem 15 (1953).