48. *Ein inverser Homomorphismus der Fundamentalgruppe*

Von Joseph WEIER

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., May 7, 1959)

Seien $n>2$ eine näturliche Zahl, M eine $(2n-1)$-dimensionale und N eine n-dimensionale orientierte zusammenhängende geschlossene polyedrale Mannigfaltigkeit, $H_n(M)$ die n-dimensionale ganzzahlige Bettigruppe von M und $H_n(N)$ diejenige von N, $F_a(N)$ die Fundamentalgruppe von N bezüglich eines Punktes $a \in N$, weiter

$$f: M \to N$$

eine stetige Abbildung. Dann ordnet f, wie dies unten präzisiert ist, jedem Element y aus $F_a(N)$ eindeutig ein Element $\varphi(y)$ aus $H_n(M)$ zu. Und es ist die Abbildung

$$\varphi: F_a(N) \to H_n(M)$$

ein durch f eindeutig bestimmter Homomorphismus.

Jedes Element x aus $H_n(M)$ wird durch f mit einem Grade $\gamma(x)$ in N abgebildet: Sei c ein die Orientierung von N repräsentierender n-Zyklus. Bedeuten dann ξ, ξ' zwei n-Zyklen aus der Homologieklasse x, so gibt es eine ganze Zahl α mit $f(\xi)=f(\xi')=c$. Hierauf ist $\gamma(x)=\alpha$. Bezeichnet G die additive Gruppe der ganzen Zahlen, so ist bekanntlich $\gamma: H_n(M) \to G$ ein Homomorphismus. Durch

$$F_a(N) \xrightarrow{\varphi} H_n(M) \xrightarrow{\gamma} G$$

wird jedem Element y der Fundamentalgruppe von N eine ganze Zahl $\gamma\varphi(y)$ zugeordnet.

Seien $x_1, x_2, \cdots$ diejenigen Elemente endlicher Ordnung von $H_n(M)$, die in $\varphi F_a(N)$ liegen. Dann ist die Zahl $\sum \gamma(x_i)$ eine Homotopieinvariante von f.

Jedem endlichen Erzeugendensystem Y der Gruppe $F_a(N)$, wobei $y_1, y_2, \cdots$ die Elemente von Y seien, entspricht eine ganze Zahl:

$$\Phi(Y) = \sum \gamma\varphi(y_i).$$

Unter den Zahlen $\phi(Y)$, wobei Y alle endlichen Erzeugendensysteme von $F_a(N)$ durchlaufe, befindet sich ein Maximum, wie man zeigen kann. Dieses ist durch f eindeutig bestimmt und homotopieinvariant.

Die Abbildung $\varphi: F_a(N) \to H_n(M)$ ist noch zu definieren. Hierzu seien Z ein Element aus $F_a(N)$ und z ein orientierter doppelpunktfreier geschlossener Streckenzug aus Z. Dann gibt es in jeder Nähe von f eine zu f homotope Abbildung $f': M \to N$ derart, dass $f'^{-1}(z)$ ein endliches Polyeder A der Dimension

$$(\dim M - \dim N)+1,$$

also der Dimension n ist. Die weiterhin in Rede stehenden Simplexe sind offen und gradlinig. Seien σ_i die mit einer Orientierung versehenen n-Simplexe einer simplizialen Zerlegung von A und σ_j eines der σ_i.

Sind q ein Punkt aus σ_j, r der Punkt $f'(q)$ aus z, C ein 1-Simplex mit $r \in C \subset z$, weiter D ein $(n-1)$-Simplex in N senkrecht zu C mit

$$r \in D \quad \text{und} \quad \bar{D} \frown z = r,$$

so überlegt man sich leicht: ist B ein hinreichend kleines $(n-1)$-Simplex in M senkrecht zu σ_j mit $q \in B$ und $A \frown \bar{B} = q$, so existiert für jeden Punkt p aus $\bar{B}-q$ die zu T parallele Projektion $g(p)$ von $f'(p)$ auf D, und es ist

$$g(p) \in D-r.$$

Für $p \in \bar{B}-B$ sei $h(p)$ die Projektion von $g(p)$ auf $\bar{D}-D$ aus r. Der Grad der Abbildung h der $(n-2)$-Sphäre $\bar{B}-B$ in die $(n-2)$-Sphäre $\bar{D}-D$ heisse α_j, wobei die für $\bar{B}-B$ und $\bar{D}-D$ zugrundezulegenden Orientierungen durch (M, σ_j) und (N, z) bestimmt sind. Hierauf ist $\sum \alpha_i \sigma_i$ ein ganzzahliger n-Zyklus aus M, dessen Homologieklasse $\varphi(Z)$ durch f eindeutig festgelegt ist.

Ergänzend folgende Bemerkungen. Zunächst fällt auf, dass der Abbildung f ein Umkehrhomomorphismus mit Hilfe von Homologiegruppen zugeordnet ist, während sich bekanntlich [2] sonst die Eigenschaften der inversen Abbildung durch die Cohomologiegruppen viel besser ausdrücken lassen. Die Abbildung f ordnet der geschlossenen orienterten Kurve z aus N einen n-Zyklus $\sum \alpha_i \sigma_i$ aus M zu. Wie durch diese Zuordnung einem gewissen kontravarianten Tensorfeld über N ein gewisses ebensolches Feld über M entspricht, tritt deutlich hervor, wenn man auf die Isomorphismen zurückgeht, die zwischen geschlossenen Ketten und geschlossenen äusseren Differentialformen bestehen [4]. Geht man diesem Gedanken weiter nach, so gelangt man [3] in die Topologie der Lieschen Gruppen. Der Zyklus $\sum \alpha_i \sigma_i$ lässt eine durch f vermittelte Integraldarstellung nach Art klassischer Integralinterpretationen [1] topologischer Konstanten zu.

Referenzen

[1] Cartan, E.,: Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces, Ann. Math., **8** (1929).

[2] Eilenberg, S., and Steenrod, N.,: Foundations of algebraic topology, Princeton Math., series 15 (1952).

[3] Nomizu, K.,: Lie groups and differential geometry, Math. Soc. Japan (1956).

[4] Weil, A.,: Sur les théorèmes de de Rham, Comment. Math. Helvet., **26** (1952).