77. *Sur les Dérivations dans les Espaces Vectoriels Topologiques sur le Corps des Nombres Complexes. I*

Par Riichi IINO
Université de Waseda

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 13, 1959)

On sait que la notion de la dérivée fonctionelle ou directionaire jouent un rôle important dans la théorie des champs.[1)2)] Dans cette note, nous allons généraliser les notions de la dérivée au sens de Fréchet et de la dérivée directionaire[3)] sur une classe des applications de l'espace vectoriel topologique sur le corps des nombres complexes dans l'espace du même type.

1. Notions asymptotiques. Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques sur le corps C des nombres complexes, localement convexes, séparés et complets, Γ_E un ensemble filtrant de semi-normes définissant la topologie de E, Γ_F un ensemble de semi-normes définissant la topologie de F. Remarquons que, si Γ est un ensemble quelconque de semi-normes définissant la topologie de E, on peut obtenir un ensemble filtrant Γ_E de semi-normes définissant la même topologie que Γ.[4)]

Désignerons par $\mathcal{C}(E, F)$ l'espace de toutes les applications continues de E dans F.

Notation. Soit f un élément de $\mathcal{C}(E, F)$. On désigne par le symbole $f(x)=o(x^n)$ le fait que la condition suivante est vérifiée:

(P) Pour toute semi-norme $q\in\Gamma_F$, il existe un voisinage ouvert V de 0 dans E, une semi-norme $p\in\Gamma_E$, une fonction numérique $\varepsilon_q(x)$ à valeurs positives, telle que $\varepsilon_q(x)\to 0$ lorsque $x\to 0$ dans E, et un nombre entier $n>0$ (ne dépend que f), tels qu'on ait:

(1) $\qquad q(f(x))\leq\varepsilon_q(x)\{p(x)\}^n$, pour tout x dans $V-\{0\}$.[5)]

Remarque 1.1. Si Γ_E est un ensemble de normes, on peut remplacer la condition (P) par la condition suivante:

(P′) Pour toute semi-norme $q\in\Gamma_F$, il existe une norme $p\in\Gamma_E$ et un nombre entier $n>0$, tels qu'on ait:

(2) $\qquad q(f(x))/\{p(x)\}^n\to 0$, lorsque $x\to 0$ dans E.

Remarque 1.2. Si E est métrisable, on peut remplacer la condition

1) K. O. Friedrichs: Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields, New York (1953).

2) M. Namiki and R. Iino: Prog. Theor. Phys., Supplement, no. 5 (1958).

3) L. A. Lusternik und W. I. Soboleff: Elemente der Funktionalanalysis, Kap. VI, Berlin (1955).

4) N. Bourbaki: Espaces Vectoriels Topologiques, Chap. II, Paris, Hermann (1953).

5) Il est clair que la condition $f\in\mathcal{C}(E, F)$ n'est pas essentiel.

(P) par la condition suivante:

(P'') Pour toute semi-norme $q \in \Gamma_F$, il existe un nombre entier $n>0$, tel qu'on ait:

(3) $q(f(x))/\{d(0, x)\}^n \to 0$, lorsque $x \to 0$ dans E,

où par d on signifie une fonction métrique sur E.

D'après la définition du symbole $f=o(x^n)$, on a immédiatement le

Théorème 1.1. 1) *Si* $f, g, h \in C(E, F)$, $f-g=o(x^n)$ *et* $g-h=o(x^n)$, *on a* $f-h=o(x^n)$. 2) *Si* $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C(E, F)$, $f_1-g_1=o(x^n)$ *et* $f_2-g_2=o(x^n)$, *on a* $(\alpha f_1+\beta f_2)-(\alpha g_1+\beta g_2)=o(x^n)$, *pour deux nombres complexes arbitraires* α, β. 3) *Soient* $f, g \in C(E, F)$ *et* T *une application linéaire continue de* E *dans* F. *Si* $f(x)-g(x)=o(x^n)$, *on a* $f(Tx)-g(Tx)=o(x^n)$.

Exemple 1.1. Soient T une application multilinéaire continue de $\prod_{i=1}^{n+1} E_i$ ($E_i=E$ pour tout i) dans F, q une semi-norme quelconque ($\in \Gamma_F$). Donc il existe un ensemble $\{p_1, p_2, \cdots, p_{n+1}\}$ des semi-normes en nombre fini sur E, ainsi qu'un nombre $A>0$, tel que l'on ait identiquement $q(T(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})) \leq A\, p_1(x_1)p_2(x_2)\cdots p_{n+1}(x_{n+1})$. En prenant $x=x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ et $T_{n+1}(x)=T(x, \cdots, x)$, alors T_{n+1} étant une application continue de E dans F, il existe une semi-norme $p \in \Gamma_E$, ainsi qu'un nombre $B>0$, telle qu'on ait

$$q(T_{n+1}(x)) \leq B\{p(x)\}^{n+1}$$

ce qui montre que $T_{n+1}=o(x^n)$.

2. Dérivée de Fréchet. Définition 2.1. Soient V un voisinage ouvert de 0 dans E, x_0 un point de E, $U=x_0+V$ un voisinage de x_0, et f une application de U dans F. On dit que f est dérivable au sens de Fréchet en un point x_0, si une formule suivante a lieu:

(1) $f(x_0+h)-f(x_0)=T[h]+\alpha(x_0; h)$, pour tout h dans $V-\{0\}$,

où $T \in \mathcal{L}(E, F)$[6] et $\alpha(x_0; h)=o(h)$; l'opérateur T s'appelle dérivée première de Fréchet de f au point x_0, et se note $df(x_0)$; $T[h]$ s'appelle dérivée première de Fréchet de f au point x_0 par rapport à l'incrément h, et se note $df(x_0; h)$ ou $df(x_0)[h]$.

Si une application f est dérivable au sens de Fréchet en un point x_0, elle est nécessairement continue en ce point, parce que E, F soient séparés. Si une application f définie sur U est dérivable au sens de Fréchet en tout point de U, la fonction $x \to df(x)$ définie sur U est une application de U dans $\mathcal{L}(E, F)$, qui s'appelle fonction dérivée de f, et se note f'.

D'après le théorème 1.1 et quelque peu de calcul, on a tout de suite le

Théorème 2.1. 1) *L'ensemble des applications définies dans* U, *prenant leurs valeurs dans* F, *et dérivables au sens de Fréchet en tout point de* U, *est un espace vectoriel sur* C, *et* $f \to f'$ *est une ap-*

6) $\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

plication linéaire de cet espace dans l'espace des applications de U *dans* $\mathcal{L}(E, F)$. 2) $f(x)=$*constante*$\in F$ *en tout point* x *de* E, *donc* $f'=0\in\mathcal{L}(E, F)$. 3) $f=T$ *et* $T\in\mathcal{L}(E,F)$, *donc* $f'=T=$*constante*$\in\mathcal{L}(E,F)$. 4) (*Dérivée d'une fonction composée*): *Soient* f *une application de* U *dans* F, *et* g *une application définie dans un ensemble ouvert contenant* $f(U)$, *prenant ses valeurs dans un espace vectoriel topologique, localement convexe, séparé et complet* G. *Si* f *est dérivable au point* x_0 *et* g *dérivable au point* $f(x_0)$, *la fonction composée* $g\circ f$ *a la dérivée égale à* $dg(f(x_0))\circ df(x_0)$. 5) *Soit* F *une algèbre topologique, tel qu'on ait* $p(xy)\leq p(x)p(y)$ *pour toute pair* (x, y) *et semi-norme* $p\in\Gamma_F$. *Si* f *et* g *sont dérivables en* $x_0\in E$, fg *serait aussi dérivable en ce point et on aurait*

$$d(fg)(x_0; h)=f(x_0)dg(x_0; h)+df(x_0; h)g(x_0) \quad \textit{pour tout } h\in E.$$

3. Dérivée faible ou dérivée directionaire. Soit f une application de E dans F. Donc la fonction $\varphi(t)=f(x+th)$ est une fonction définie sur le plan complexe C, à valeurs dans F. Soient V un voisinage disqué de 0 dans E et x_0 un point fixé dans E. Lorsque f est une application définie sur x_0+V, $\varphi(t)$ est définie sur un domaine circulaire de centre 0 dans C et ce rayon dépendant de h.

Soit $\varphi(t)$ définie sur un domaine D dans C. On dit que $\varphi(t)$ est dérivable en un point t_0 dans D, si $\lim_{t\to 0}\dfrac{\varphi(t+t_0)-\varphi(t_0)}{t}$ existe; la valeur de cette limite se note $\varphi'(t_0)$. On dit que $\varphi(t)$ est régulière dans D, si elle est dérivable en tout point de D.

Remarque 3.1. Les propriétés suivantes sont équivalentes:[7]

i) Une fonction vectorielle $\varphi(t)$ est régulière dans D.

ii) Une fonction numérique $\langle\varphi(t), y'\rangle$ est régulière dans D pour tout y' dans F' (le dual de F), le crochet $\langle\ ,\ \rangle$ désignant la dualité entre F et F'.

Remarque 3.2. Lorsque $\varphi(t)$ est régulière dans D, elle est indéfiniment dérivable dans D, à cause de remarque 3.1.

Définition 3.1. Soient x_0 et h deux points fixés dans E. Lorsque $\varphi(t)=f(x_0+th)$ est définie sur un domaine D contenant l'origine dans C et elle est dérivable en l'origine, on dit que f est faiblement dérivable ou directionairement dérivable en un point x_0 au long de h, la valeur $\varphi'(0)$ s'appelle dérivée faible ou dérivée directionaire première au long de h de f au point x_0, et se note $Df(x_0; h)$ ou $Df(x_0)[h]$.

Lemme 3.1. *Si* f *est faiblement dérivable en un point* x_0 *de* E *au long de* h *pour tout* $h\in E$, *une application* $h\to Df(x_0)[h]$ *est une application linéaire de* E *dans* F.

Démonstration. 1) Posons $\varphi(s, t)=f(x_0+sh+tk)$, h, $k\in E$; t, s

7) Voir T. Shibata: Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, sect. A, **5**, no. 133 (1955).

nombres complexes. Par l'hypothèse du lemme, on a

$$\varphi(s, t)=\varphi(0, 0)+s\frac{\partial}{\partial s}\varphi(0, 0)+t\frac{\partial}{\partial s}\varphi(0, 0)+\beta(s, t),$$

où une fonction $\beta(s, t)/|s|+|t|\to 0$ lorsque $|s|+|t|\to 0$.
Donc on a $f(x_0+sh+tk)=f(x_0)+sDf(x_0)[h]+tDf(x_0)[k]+\beta(s, t)$.
En prenant $s=t$, et tendant t vers 0, on ait

$$Df(x_0)[h+k]=Df(x_0)[h]+Df(x_0)[k].$$

2) Soit A un nombre complexe quelconque. La formule suivante est évidente:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tAh)-f(x_0)}{t}=A\lim_{At\to 0}\frac{f(x_0)+tAh)-f(x_0)}{At}.$$

Donc on a $Df(x_0)[Ah]=ADf(x_0)[h]$.
On a alors le résultat d'après 1) et 2).

Remarque 3.3. En générale, l'application $h\to Df(x_0)[h]$ n'est pas nécessairement continue.

Théorème 3.1. *Soient V un voisinage disqué de* 0 *dans E, x_0 un point de E, $U=x_0+V$, f une application de U dans F et dérivable au sens de Fréchet en ce point x_0. Dans ces conditions, f est faiblement dérivable en x_0 au long de h pour tout $h\in E$, et $df(x_0)[h]=Df(x_0)[h]$; par conséquent l'application $h\to Df(x_0)[h]$ de E dans F est continue.*

Démonstration. Pour h fixé, il existe un nombre $\delta>0$, à cause de V disqué et absorbant, tel qu'on ait

$$f(x_0+th)-f(x_0)=tdf(x_0)[h]+\alpha(x_0; th) \text{ pour tout } |t|<\delta,$$

où $\alpha(x_0; th)=o(th)$, donc $\alpha(x_0; th)=o(t)$, d'où le théorème.

Corollaire 1 (le réciproque de 2) du théorème 2.1). *Si f est dérivable au sens de Fréchet partout dans E et $f'=0$, donc on a $f(x)=$constante identiquement dans E.*

Démonstration. Soient x_0 un point fixé et h un point arbitraire dans E, t nombre complexe. Donc $\varphi(t)=f(x_0+th)$ est régulière dans le plan complexe C (en vertu du lemme 3.1) et $\varphi'(t)=df(x_0+th)[h]$. Par conséquent pour chaque $y'\in F'$ (le dual de F), une fonction numérique $\langle\varphi(t), y'\rangle$ est une fonction régulière au sens usuel et $\frac{d}{dt}\langle\varphi(t), y'\rangle=0$, donc $\langle\varphi(t), y'\rangle$ est constante; autrement dit: $f(x_0+th)=f(x_0)=$constante pour tout $t\in C$. h étant arbitraire, $f(x)=$constante pour tout x dans E.

On peut généraliser le corollaire 1, comme suite:

Corollaire 2. *Soient x_0 un point de E, V un voisinage ouvert disqué de* 0 *dans E, et f une application dérivable au sens de Fréchet dans $U=x_0+V$, avec $f'=0$ identiquement dans U. Donc f est constante partout dans U.*

En effet, soit h un point quelconque dans V. Comme une fonction $\varphi(t)=f(x_0+th)$ est régulière dans un voisinage de la partie connexe $\{t;\ |t|\leq 1\}$ et $\varphi'(t)=0$ dans ce voisinage, on a $f(x_0)=f(x_0+h)$, donc la fonction $f(x)$ reste constante lorsque x parcourt dans V, c. q. f. d.

Soient x_0 et h deux points fixés dans E, $\varphi(t)=f(x_0+th)$ une fonction régulière dans un domaine convexe D dans le plan complexe C, t_1 et t_2 deux nombres complexes dans D. En posant $\varphi(t; y')=\langle\varphi(t), y'\rangle$, où y' est un élément quelconque de F', elle est régulière (comme une fonction numérique) dans D. Grâce au théorème de la moyenne dans la théorie des fonctions d'une variable complexe, il existe deux nombres réelles θ_1, θ_2 tels que

$$\frac{\varphi(t_2; y')-\varphi(t_1; y')}{t_2-t_1}=\Re\varphi'(t_1+(t_2-t_1)\theta_1; y)+i\Im\varphi'(t_1+(t_2-t_1)\theta_2; y'),$$
$$0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1,$$

où $\varphi'(t; y')$ désigne dérivée première par rapport à t.

Montrons que θ_1, θ_2 dans l'égalité précédent sont indépendant de y' dans F'. Pour cela, il suffit de montrer ce fait pour θ_1. Soient y'_1, y'_2 deux elements de F', λ un paramètre réel. Désignerons par $\theta(y')$ le nombre complexe $t_1+(t_2-t_1)\theta_1$ dans l'égalité précédante. Comme l'égalité $\varphi(t; y'_1+\lambda y'_2)=\varphi(t; y'_1)+\lambda\varphi(t; y'_2)$ a lieu, en vertu de la linéarité de $\varphi(t; y')$ par rapport à y', on a

$$\Re\varphi'(\theta(y'_1+\lambda y'_2); y'_1+\lambda y'_2)=\Re\varphi'(\theta(y'_1+\lambda y'_2); y'_1)+\lambda\Re\varphi'(\theta(y'_1+\lambda y'_2); y'_2),$$

et d'autre part, on a

$$\Re\varphi'(\theta(y'_1); y'_1)+\lambda\Re\varphi'(\theta(y'_2); y'_2)=\Re\varphi'(\theta(y'_1+\lambda y'_2); y'_1+\lambda y'_2).$$

Donc l'égalité

$$\Re\varphi'(\theta(y'_1+\lambda y'_2); y'_1)-\Re\varphi'(\theta(y'_1); y'_1)=\lambda\{\Re\varphi'(\theta(y'_2); y'_2)-\Re\varphi'(\theta(y'_1+\lambda y'_2); y'_2)\}$$

a lieu. Comme $\theta(y'_1+\lambda y'_2)$ reste borné, lorsque λ parcourt dans $(-\infty, \infty)$, d'où le résultat.

Par conséquent on a le

Théorème 3.2 (Théorème de la moyenne). *Soient x_0, h deux points fixés dans E, f faiblement dérivable en tout point x_0+th au long de h, lorsque t demeure dans un domaine convexe D dans C, et t_1, t_2 deux nombres complexes arbitraires dans D. Dans ces conditions, il existe deux nombres réels θ_1, θ_2, tels qu'on ait*

$$(1)\qquad \frac{f(x_0+t_2h)-f(x_0+t_1h)}{t_2-t_1}=\Re\{Df(x_0+(t_1+(t_2-t_1)\theta_1)h)[h]\}$$
$$+i\Im\{Df(x_0+(t_1+(t_2-t_1)\theta_2)h)[h]\},\ 0<\theta_1,\ \theta_2<1,$$

où $\Re$ et $\Im$ signifient parties réelle et imaginaire définies sur F'_0 (l'espace vectoriel topologique sur R sous-jacent à F'), respectivement.

Donnons maintenant une condition d'existence de la dérivée au sens de Fréchet.

Hypothèse. Soit E un espace, dont la topologie est définie par un ensemble Γ_E de normes sur E. Soient V un voisinage ouvert disqué de 0 dans E, x_0 un point fixé de E, $U=x_0+V$, et f une application continue de U dans F, faiblement dérivable dans U au long de h pour tout h de E. En outre on suppose que les dérivées $Df(x)$ sont continues (c'est-à-dire, elle sont les applications linéaires continues de E dans F) pour tout $x \in U$, et une application $x \rightarrow Df(x)$ de U dans $\mathcal{L}_b(E, F)$[8] est continue.

Dans ces conditions, une fonction $\varphi(t)=f(x_0+th)$ ($h \in V-\{0\}$) est régulière dans un domaine D contenant $\{t; |t| \leq 1\}$ et $\varphi'(t)$ est aussi régulière dans D. Par conséquent, on peut définir l'intégrale de Riemann de la fonction $\varphi'(t)$ au long de toute courbe réctifiable dans D, en particulier, du segment d'extrémités 0 et 1. Donc on a ausstôt

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\int_0^1 \varphi'(t)dt=\int_0^1 Df(x_0+th)[h]dt, \tag{2}$$

d'où

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Df(x_0)[h]+\int_0^1 \{Df(x_0+th)-Df(x_0)\}[h]dt. \tag{3}$$

Soient M un ensemble borné ne contenant pas 0 dans E, p une semi-norme de Γ_F. On voit que $p[\{Df(x_0+k)-Df(x_0)\}[h]] \rightarrow 0$, uniformément sur M, lorsque $k \rightarrow 0$ dans E. D'autre part, comme $Df(x)$ est linéaire continue, il existe une norme q (et un nombre $A>0$), telle que $p[\{Df(x_0+k)-Df(x_0)\}[h]] \leq Aq(h)$. En posant $A_{pq}(k)=\sup_{h \in M} p[\{Df(x_0+k)-Df(x_0)\}[h]]/q(h)$, $A_{pq}(k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow 0$ dans E. Par conséquent, on a

$$\{Df(x_0+th)-Df(x_0)\}[h]=o(h). \tag{4}$$

Il résulte de (2), (3), (4) que la relation suivante

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Df(x_0)[h]+o(h)$$

est vraie. Donc on a le

Théorème 3.3. *Dans l'hypothèse précédente, la fonction f est dérivable au sens de Fréchet en le point x_0, et l'égalité*

$$df(x_0)[h]=Df(x_0)[h]$$

a lieu.

8) Par $\mathcal{L}_b(E, F)$ on désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F, muni de la topologie de la convergence borné.