9. Sur les Dérivations dans les Espaces Vectoriels Topologiques sur le Corps des Nombres Complexes. III

Par Riichi IINO
Université de Waseda

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Jan. 12, 1960)

Continuons l'étude sur les dérivations dans les espaces vectoriels topologiques sur le corps des nombres complexes.[1] Dans cette note, nous désignerons par E et F deux espaces vectoriels topologiques sur le corps C des nombres complexes, localement convexes, séparés et complets.[2]

1. Théorèmes de l'identité et de Liouville. Commençons par nous préparer un lemme suivant:

Lemme 1.1. *Soient x_0 un point fixé de E, V, V_1 et V_2 trois voisinages disqués et ouverts de 0 dans E, tels qu'on ait $V \supset V_1+V_1+V_1$ et $V_1 \supset V_2+V_2$. Soient $\Omega=x_0+V$, $\Omega_1=x_0+V_1$, x_1 un point fixé de Ω_1 tel que $x_1-x_0 \in V_2$, $\Omega_2=x_1+V_2$. Si f est une application définie sur Ω à valeurs dans F, faiblement dérivable partout dans Ω au long de h pour tout $h \in E$ et $f=0$ partout dans Ω_2, f doit être aussi égale à 0 identiquement dans Ω.*

Démonstration. Remarquons, d'abord, qu'on a $\Omega \supset \Omega_1 \supset \Omega_2$. Soit x_2 un point arbitraire dans Ω_1; comme V_1 est disqué, on a $x_2-x_1 \in V_1+V_1$. Puisque V_1+V_1 est aussi un voisinage disqué et ouvert de 0, il existe un nombre α (>1), tel que, pour tout nombre complexe $t(|t|<\alpha)$, $t(x_2-x_1) \in V_1+V_1$ et par suite $x_1+t(x_2-x_1)-x_0 \in V_1+V_1+V_1 \subset V$ ont lieu. D'autre part, il existe un nombre β ($0<\beta<\alpha$), tel que la relation $|t|<\beta$ entraîne $t(x_2-x_1) \in V_2$ (V_2 disqué).

Par l'hypothèse, une fonction $\varphi(t)=f(x_1+t(x_2-x_1))$ d'une variable complexe définie dans un domaine $D=\{t; |t|<\alpha\}$ dans le plan complexe à valeurs dans F est régulière dans D et égale à 0 dans un domaine $D_1=\{t; |t|<\beta\}$ contenu dans D. Donc, en vertu du remarque 3.1 (I), pour chaque $y' \in F'$ (le dual de F), une fonction numérique $\langle \varphi(t), y' \rangle$ est régulière dans D et égale à 0 dans D_1, le crochet $\langle\, ,\, \rangle$ désignant la dualité entre F et F'. Or, dans cette condition, on a $\langle \varphi(t), y' \rangle=0$ partout dans D pour chaque $y' \in F'$, à cause du théorème de l'identité dans la théorie des fonctions d'une variable complexe. Par conséquent, l'identité $f(x_1+t(x_2-x_1))=0$ a lieu partout dans D, en particulier, en

1) R. Iino: Sur les dérivations dans les espaces vectoriels topologiques sur le corps des nombres complexes. I, Proc. Japan Acad., **35**, no. 7, 343-348 (1959); Ibid. II, **35**, no. 9, 530-535 (1959). Nous noterons par (I) et (II) ces Notes, respectivement.

2) L'hypothèse à la complécité de E n'est pas essentielle, ainsi que dans (I) et (II).

posant $t=1$, $f(x_2)=0$, ce qui montre que $f=0$ dans Ω_1, x étant arbitraire dans Ω_1.

Enfin, on peut aisément déduire du fait démontré au-dessus que $f=0$ dans Ω.

D'après ce lemme, on a immédiatement le

Théorème 1.1 (Théorème de l'identité). *Soient Ω un domaine dans E (partie ouverte et connexe de E), Ω_1 un sous-domaine non vide de Ω, f une application de Ω dans F, faiblement dérivable partout dans Ω au long de h pour tout élément h de E. Dans ces conditions, lorsque $f=0$ dans Ω_1, on a $f=0$ dans Ω.*

Démonstration. Soit A un ensemble de tout point de Ω, tel qu'il existe un voisinage ouvert de ce point dans lequel $f=0$; A est évidemment un ensemble ouvert dans Ω. Nous allons maintenant démontrer qu'il est à la fois un ensemble fermé dans Ω. Soit x_0 un point adhérent à A; quel que soit V un voisinage disqué et ouvert de 0, tel que $x_0+V\subset\Omega$, il existe un voisinage disqué et ouvert V_1 de 0, tel que $V_1+V_1+V_1\subset V$, et il existe un point x_1 qui appartient à $A\frown(x_0+V_1)$. D'après la définition de A, il existe un voisinage disqué et ouvert V_2 de 0, tel qu'on ait $x_1+V_2\subset A\frown(x_0+V_1)$ et donc $f=0$ ait lieu dans x_1+V_2. Par conséquent, d'après le lemme précédent, il en résulte que $f=0$ dans x_0+V, donc $x_0\in A$, qui montre bien que A est fermé dans Ω. Comme Ω est connexe et A est non vide, on a finalement $\Omega=A$, ce qui achève la démonstration.

On va maintenant étendre le théorème de Liouville:

Théorème 1.2 (Théorème de Liouville). *Soit f une application de E dans F, faiblement dérivable partout dans E au long de h pour tout h dans E. Si f est borné dans E, on a $f(x)=$constante $\in F$ pour tout x de E.*

En effet, soient x un point arbitraire de E, t une variable complexe; la fonction $\varphi(t)=f(tx)$ est une fonction entière bornée d'une variable complexe à valeurs dans F. En vertu du théorème généralisé de Liouville,[3] on a immédiatement $\varphi(t)=$constante, en particulier, $f(x)=\varphi(1)=\varphi(0)=f(0)$, d'où le théorème, x étant arbitraire dans E.

2. Structure uniforme sur l'espace $D(\Omega, F)$. Soit Ω une partie ouverte de E. Nous désignerons par $D(\Omega, F)$ l'ensemble de toutes les applications continues de Ω dans F, faiblement dérivables partout dans Ω au long de h pour tout $h\in E$. D'après les théorèmes 3.1 (I) et 3.2 (II), on peut dire que $D(\Omega, F)$ est l'ensemble de toutes les applications de Ω dans F, dérivables au sens de Fréchet partout dans Ω. Nous avons su le fait que, dans le théorème 2.1 (I), l'ensemble $D(\Omega, F)$ est un espace vectoriel sur C.

Nous allons maintenant introduire dans l'ensemble $D(\Omega, F)$ la $\mathfrak{S}$-

3) T. Shibata: Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, **5**, no. 133 (1955).

topologie.[4] Étant donné un ensemble $\mathfrak{S}$ des parties non vides de E, tel que tout élément de Ω appartienne à un ensemble de $\mathfrak{S}$ au moins, nous désignerons par $D_{\mathfrak{S}}(\Omega, F)$ l'espace topologique obtenu en munissant $D(\Omega, F)$ de la $\mathfrak{S}$-topologie; la $\mathfrak{S}$-topologie sur $D(\Omega, F)$ est compatible avec la structure de groupe additif de $D(\Omega, F)$. Puisque l'espace F est un espace uniforme et séparé, il s'ensuit que l'espace topologique $D_{\mathfrak{S}}(\Omega, F)$ est aussi uniforme et séparé.

Dans les $\mathfrak{S}$-topologies de $D(\Omega, F)$, les cas les plus importants sont les suivants:

1) $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties compactes de Ω (la topologie de la convergence compacte).[5]

2) $\mathfrak{S}$ est l'ensemble formé de la seule partie Ω (la topologie de la convergence uniforme).

Il est facile de voir que la structure uniforme 1) de $D(\Omega, F)$ (se note $D_c(\Omega, F)$) est compatible avec la structure d'espace vectoriel sur C de $D(\Omega, F)$.[6] Au contraire, en général, la structure uniforme 2) de $D(\Omega, F)$ n'est pas compatible avec la structure uniforme d'espace vectoriel sur C de $D(\Omega, F)$.

Considérons d'abord l'espace $D_u(\Omega, F)$ obtenu en munissant $D(\Omega, F)$ de la topologie de la convergence uniforme sur Ω. On va montrer le

Théorème 2.1. *L'espace $D_u(\Omega, F)$ est complet.*

Démonstration. Désignerons par $\mathcal{F}_u(\Omega, F)$ l'espace uniforme de toutes les applications de Ω dans F, muni de la topologie de la convergence uniforme sur Ω. On sait que $\mathcal{F}_u(\Omega, F)$ est un espace complet;[7] tout revient à démontrer que l'espace $D_u(\Omega, F)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{F}_u(\Omega, F)$. Soit f un point adhérent à $D(\Omega, F)$ (f est nécessairement continue dans Ω); quel que soit V un voisinage disqué et fermé de 0 dans F, il existe un élément $g \in D(\Omega, F)$, tel qu'on ait

$$f(x)-g(x) \in V \qquad \text{pour tout } x \in \Omega. \tag{1}$$

Soient x_0 un point fixé de Ω et h de E; il existe un nombre $\alpha > 0$, tel que la relation $|t| < \alpha$ (t un nombre complexe) entraîne $x_0 + th \in \Omega$. Donc on a $f(x_0+th)-g(x_0+th) \in V$ pour tout t ($|t|<\alpha$). Par conséquent, lorsque t_0 est un nombre complexe, tel que $|t_0|<\alpha$, r un nombre positif, tel que $\alpha-|t_0|>r$, et t un nombre complexe tel que $|t-t_0|<\frac{r}{2}$, la relation suivante a lieu:

$$\frac{f(x_0+\xi h)}{\xi-t}-\frac{g(x_0+\xi h)}{\xi-t} \in \frac{2}{r}V, \quad \text{pour tout } \xi \text{ avec } |\xi-t_0|=r, \tag{2}$$

puisque V est un voisinage disqué de 0.

4) N. Bourbaki: Topologie Générale, Chap. X, Paris (1949).

5) On peut remplacer $\mathfrak{S}$ par l'ensemble de toutes les parties relativement compactes de Ω.

6) N. Bourbaki: Espaces Vectoriels Topologiques, Chap. III, Paris (1955).

7) Voir N. Bourbaki: Loc. cit. 4), pp. 7–8.

D'autre part, comme une application $x \to f(x)$ de Ω dans F est continue, la fonction $\xi \to f(x_0+\xi h)$ est aussi une fonction continue du cercle $\{\xi; |\xi-t_0|=r\}$ dans F. On a alors, à cause de la relation (2),

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-t_0|=r} \frac{f(x_0+\xi h)}{\xi-t}\,d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-t_0|=r} \frac{g(x_0+\xi h)}{\xi-t}\,d\xi \in 2V,$$

car V est fermé et disqué.

Il résulte finalement de (1), (3) et $g \in D(\Omega, F)$ que

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-t_0|=r} \frac{f(x_0+\xi h)}{\xi-t}\,d\xi - f(x_0+th) \in 3V.$$

Or, comme l'espace F est séparé, on a alors

$$(5) \qquad f(x_0+th) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-t_0|=r} \frac{f(x_0+\xi h)}{\xi-t}\,d\xi \quad \text{pour tout } t \text{ avec } |t-t_0| < \frac{r}{2}.$$

Comme t_0 a été arbitraire dans un domaine $D=\{t; |t|<\alpha\}$, la relation (5) signifie que la fonction $f(x_0+th)$ est régulière dans D et par suite $f \in D(\Omega, F)$ (f étant continue dans Ω), puisque (x, h) est arbitraire dans $\Omega \times E$, c.q.f.d.

Considérons ensuite l'espace $D_c(\Omega, F)$ obtenu en munissant $D(\Omega, F)$ de la topologie de la convergence compacte. On a tout de suite le

Théorème 2.2. *L'espace $D_c(\Omega, F)$ est un espace vectoriel topologique sur le corps C, localement convexe et séparé.*

En effet, comme nous avons déjà vu, la structure uniforme de l'espace $D_c(\Omega, F)$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel sur C; il suffit donc de montrer que l'espace $D_c(\Omega, F)$ est localement convexe, étant ce séparé. Or, cette assertion résulte immédiatement du fait que l'espace F est localement convexe, c.q.f.d.

Désignerons par $\mathcal{F}_c(\Omega, F)$ l'espace uniforme de toutes les applications de Ω dans F, muni de la topologie de la convergence compacte. Tout d'abord, remarquons que l'espace $\mathcal{F}_c(\Omega, F)$ est un espace complet et la topologie induite sur $D(\Omega, F)$ par celle de $\mathcal{F}_c(\Omega, F)$ est identique à la topologie de $D_c(\Omega, F)$. Ensuite, nous désignerons par $K(\Omega, F)$ l'ensemble de toutes les applications de Ω dans F dont la restriction à toute partie compacte A de Ω est continue dans A et faiblement dérivable partout dans Ω au long de h pour tout $h \in E$.

Nous allons démontrer le

Théorème 2.3. *L'espace $K_c(\Omega, F)$, muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{F}_c(\Omega, F)$ est un espace vectoriel topologique sur C, localement convexe, séparé et complet.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'espace $K_c(\Omega, F)$ est complet, puisque la partie restante de l'énoncé est évidente. Pour cela, nous allons voir que $K_c(\Omega, F)$ est fermé dans $\mathcal{F}_c(\Omega, F)$ (l'espace complet). Soit f un point adhérent à $K(\Omega, F)$; f est une application de Ω dans F, dont la restriction à toute partie compacte A de Ω est continue dans A. En effet, soient V un voisinage de 0 dans F, W un voisinage symétrique de 0 dans F tel que $W+W+W\subset V$; pour toute partie compacte A de Ω, il existe un élément $g\in K(\Omega, F)$, tel qu'on a $f(x)-g(x)\in W$ pour tout $x\in A$, et un voisinage $U(x)$ de $x\in A$, tel que la relation $x'\in A\frown U(x)$ entraîne $g(x)-g(x')\in W$. Par conséquent, on a $f(x)-f(x')\in W+W+W\subset V$ pour tout $x'\in A\frown U(x)$, ce qui montre le fait que la restriction de f à A est continue dans A.

D'autre part, f est faiblement dérivable partout dans Ω. En effet, soient (x, h) un point quelconque de $\Omega\times E$, V un voisinage disqué et fermé de 0 dans F. Désignerons par α un nombre positif tel que $\{x_0+th; |t|<\alpha\}\subset\Omega$. Donc, pour un nombre positif r $(<\alpha)$, l'ensemble $\{x_0+th; |t|\leq r\}$ est une partie compacte de Ω. Par l'hypothèse, il existe un élément $g\in K(\Omega, F)$, tel qu'on ait $f(x_0+th)-g(x_0+th)\in V$ pour tout t $(|t|\leq r)$; comme $f(x_0+th)$ est continue dans l'ensemble $\{t; |t|<r\}$ et $g(x_0+th)$ est régulière dans un domaine $\{t; |t|<\alpha\}$, de la même considération que le théorème 2.1 nous pouvons montrer que la fonction $f(x_0+th)$ est dérivable en $t=0$, ce qui montre que f est faiblement dérivable en x_0 au long de h, c.q.f.d.

Remarque. Puisque l'espace $D_c(\Omega, F)$ est un sous-espace de $K_c(\Omega, F)$, $K_c(\Omega, F)$ contient le complété $\hat{D}_c(\Omega, F)$ de $D_c(\Omega, F)$.

Lorsque l'espace E est localement compact, on peut aisément montrer que les trois espaces $K_c(\Omega, F)$, $D_c(\Omega, F)$ et $\hat{D}_c(\Omega, F)$ sont identiques. Or, en vertu du théorème bien connu dans la théorie des espaces vectoriels topologiques, un espace vectoriel topologique localement compact sur C doit être de dimension finie sur C. Donc, comme dans ce cas E est isomorphe à C^n (l'espace numérique de dimension complexe n), l'identité des trois espaces au-dessus est le fait évident, puisque dans C^n la notion de la dérivée au sens de Fréchet (ou de la dérivée faible) à la fonction continue se ramène à la notion de la dérivée usuelle dans la théorie des fonctions à valeurs vectorielles de plusieurs variables complexes.

Lorsque l'espace E est un espace métrisable, c'est-à-dire, un espace de Fréchet, chaque élément f de $K(\Omega, F)$ est nécessairement une fonction continue de Ω dans F. On a donc $K(\Omega, F)\subset D(\Omega, F)$. Par conséquent, on a $K_c(\Omega, F)=\hat{D}_c(\Omega, F)=D_c(\Omega, F)$, ce qui montre que l'espace $D_c(\Omega, F)$ est un espace complet.

3. Continuité de l'application $f\rightarrow f'$. Désignerons par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel topologique sur C des applications linéaires continues de E dans F. D'après le théorème 2.1 (I), l'application $f\rightarrow f'$[8] de $D(\Omega, F)$ dans $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{L}(E, F))$ (l'espace vectoriel complexe de toutes les applications de Ω dans $\mathcal{L}(E, F)$) est linéaire. D'autre part, en vertu du théorème 3.1 (II), l'application $x\rightarrow f'(x)$ de Ω dans $\mathcal{L}(E, F)$ est une

8) Voir n° 2 (I).

application continue de Ω dans $\mathcal{L}_b(E, F)$ (l'espace vectoriel topologique obtenu en munissant $\mathcal{L}(E, F)$ de la topologie de la convergence bornée), c'est-à-dire, $f' \in C(\Omega, \mathcal{L}_b(E, F))$ (l'espace vectoriel sur C des applications continues de Ω dans $\mathcal{L}_b(E, F)$).

Nous allons démontrer maintenant le

Théorème 3.1. *L'application $f \to f'$ de $D_u(\Omega, F)$ dans un espace vectoriel topologique complexe $C(\Omega, \mathcal{L}_b(E, F))$, muni de la topologie de la convergence compacte (se note $C_c(\Omega, \mathcal{L}_b(E, F))$), est continue.*

Démonstration. Soit A une partie compacte de E contenue dans Ω; pour chacun de point $x \in A$, il existe deux voisinages disqués $W(x)$ et $V(x)$ de 0 dans E tels que $x + W(x) \subset \Omega$, $V(x) + V(x) \subset W(x)$ et $W(x)$ fermé. Par conséquent, les ensembles $x + V(x)$ forment un recouvrement de A, lorsque x parcourt dans A; il existe un nombre fini de points x_i $(1 \leq i \leq n)$ de A et de voisinages V_i[9] $(1 \leq i \leq n)$ de 0 tels que $\Omega \supset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_i) \supset A$, A étant un ensemble compact.

D'autre part, soit B une partie bornée de E; il existe n nombres $\alpha_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$, dont les relations $|t| \leq \alpha_i$ entraînent $tB \subset V_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Par suite on a $x + tB \subset x_i + V_i + V_i \subset x_i + W_i$ $(1 \leq i \leq n)$ pour tout t $(|t| \leq \alpha_i)$, lorsque x parcourt dans $x_i + V_i$ $(1 \leq i \leq n)$, et en posant $\alpha = \operatorname{Min}_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$, on a $x + tB \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + W_i) \subset \Omega$, pour tout $x \in A$. Soient maintenant f un élément de $D(\Omega, F)$, V un voisinage disqué et fermé de 0 dans F. En posant:

$$W = \{g \in D(\Omega, F);\ g(x) - f(x) \in \alpha V \quad \text{pour tout } x \in \Omega\}$$

(un voisinage de f dans $D_u(\Omega, F)$), pour tout $g \in W$, on a:

$$g(x+th) - f(x+th) \in \alpha V, \quad \text{pour tout } x + th \in A + tB \text{ avec } |t| \leq \alpha:$$

pour tout ξ $(|\xi| = \alpha)$, on a

$$\frac{g(x+\xi h)}{\xi^2} - \frac{f(x+\xi h)}{\xi^2} \in \frac{1}{\alpha} V \quad \text{pour tous } x \in A \text{ et } h \in B$$

(V étant disqué), et par suite on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\alpha} \frac{g(x+\xi h)}{\xi^2} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\alpha} \frac{f(x+\xi h)}{\xi^2} d\xi \in V,$$

V étant fermé. Par conséquent, en vertu de la formule (3) (II), $g \in W$ entraîne $Dg(x)[h] - Df(x)[h] \in V$ pour tous $x \in A$ et $h \in B$, ce qui achève la démonstration, compte tenu du théorème 3.2 (II).

Remarque. En général, l'application $f \to f'$ de $D_u(\Omega, F)$ dans $C_u(\Omega, \mathcal{L}_b(E, F))$ n'est pas continue.

De même considération que le théorème au-dessus et quelque peu de la modification, on a le

Théorème 3.2. *L'application $f \to f'$ de l'espace vectoriel topologique $D_c(\Omega, F)$ dans $C_c(\Omega, \mathcal{L}_c(E, F))$*[10] *est une application linéaire continue.*

---

9) On désigne par V_i le voisinage $V(x_i)$ de 0.

10) Par $\mathcal{L}_c(E, F)$ on désigne l'espace vectoriel topologique obtenu en munissant $\mathcal{L}(E, F)$ de la topologie de la convergence compacte.