# 141. Sur la Théorie Générale des Ensembles Partiellement Ordonnés. I

Par Mihail BENADO

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1960)

*Résumé.* Dans cette note et les suivantes de cette série, je présente les principaux résultats de mes travaux [1–3], auxquels je renvoie quant aux démonstrations. Qualques notions fondamentales ainsi qu'une partie de ces résultats se trouvent déjà dans ma note [4] et dans mon rapport [5] où j'ai donné une première vue d'ensemble sur mes recherches à ce sujet. Il s'agit d'une extension aux ensembles partiellement ordonnés les plus généraux des méthodes et des principes de la théorie des treillis dont j'ai proposé autre fois une première extension par ma théorie des multitreillis [6–8].

Cette première note a un caractère préliminaire: elle contient les définitions des notions fondamentales et quelques unes de leurs conséquences les plus simples.

1. *Structures géométriques.* 1.1. *Notations.* Ensembles et sousensembles sont notés par des majuscules latines; l'ensemble vide est noté par $\phi$. Éléments d'ensembles et de sousensembles sont désignés par des minuscules latines; le symbôle $\{a, b, c, \cdots\}$ dénote l'ensemble non nécessairement dénombrable dont les éléments sont $a, b, c, \cdots$ . Majuscules grecques désignent des relations binaires alors que les minuscules grecques dénotent toujours des applications d'un ensemble dans (sur) un autre. Les symbôles $\bigcup$, $\bigcap$, $\subseteq(\supseteq)$ signifient respectivement union, intersection, inclusion au sens de la théorie générale des ensembles. Enfin $X$ dénote toujours le produit cartésien.

1.2. *Définition.* Par *configuration abstraite* ou simplement *configuration* et par *ensemble partiellement ordonné* ([9], Chap. I, 1), j'entends une seule et même chose.

Dans tout ce qui suit $\mathfrak{P}$ *désigne* une configuration quelconque par rapport à l'ordre partiel $\geq$ ou $\leq$.

1.2.1. *Définition.* Pour $u, v \in \mathfrak{P}$ tels que $u \geq v$, j'entends par *quotient* $u/v$ l'ensemble de tous les $x \in \mathfrak{P}$ tels que $u \geq x \geq v$. Cf. [9], Chap. I, § 1.

1.2.2. *Notation.* Pour chaque $A \subseteq \mathfrak{P}$ je dénote par $VA$ l'ensemble de tous les $u \in \mathfrak{P}$ tels que $u \geq a$ pour chaque $a \in A$. Par la dualité ([9], Chap. I, § 3), le symbôle $\Lambda A$ dénote l'ensemble de tous les $v \in \mathfrak{P}$ tels que $v \leq a$ pour chaque $a \in A$.

Au cas où $A=\phi$, ou a comme à l'ordinaire, $V\phi=\Lambda\phi=\mathfrak{P}$.

1.3. *Définition.* J'appelle *relation de divisibilité* dans toute relation binaire $\Upsilon$ reliant certains *éléments* $d \in \mathfrak{P}$ à certains *sousensembles* $A \subseteq \mathfrak{P}$ telle que $d\Upsilon A$ (lire: $d$ est un *$\Upsilon$-diviseur* de $A$) entraîne $VA \neq \phi$ et $d \in VA$ (1.2.2). De même, j'appelle *relation de multiplicabilité* dans $\mathfrak{P}$ toute relation binaire $\Sigma$ reliant certains éléments $m \in \mathfrak{P}$ à certains sousensembles $A \subseteq \mathfrak{P}$ telle que $m\Sigma A$ (lire: $m$ est un *$\Sigma$-multiple* de $A$) entraîne $\Lambda A \neq \phi$ et $m \in \Lambda A$ (1.2.2).

Cf. ma note [4], 2.1 à laquelle je renvoie quant aux exemples.

1.3.1. La dualité au sens de [9], Chap. I, § 3 transforme évidemment toute relation de divisibilité $\Upsilon$ (multiplicabilité $\Sigma$) en une relation de multiplicabilité $\Sigma = \breve{\Upsilon}$ (divisibilètè $\Upsilon = \breve{\Sigma}$). Mais je ne supposerai jamais dans la suite (sauf avis expres du contraire) que les relations $\Upsilon, \Sigma$ sont duales l'une de l'autre au sens de ma note [4], 2.4.

1.4. *Définition*. Par $(\Upsilon, \Sigma)$-quadrilatère de $\mathfrak{P}$ j'entends tout ensemble de quatre éléments $a, b, d, m \in \mathfrak{P}$ (non nécessairement distincts deux à deux) tels que $d\Upsilon\{a, b\}$ et $m\Sigma\{a, b\}$ (1.1).

1.5. *Définition.* Je dirai que la configuration $\mathfrak{P}$ *est munie d'une $(\Upsilon, \Sigma)$-structure géométrique*, lorsque l'ensemble de tous les $(\Upsilon, \Sigma)$-quadrilatères (1.4) de $\mathfrak{P}$ n'est pas vide.

Cette définition est un peu plus large que celle de [4], 2.5, axiome *SD*. Symbôle : $G(\Upsilon, \Sigma)$.

1.5.1. Parmi les structures géométriques usuelles, les plus importantes, sous doute, sont les structures géométriques *dédékindienne, hausdorffienne* et *rieszenne*: cf. [4], 2.2 Exemples 1–3. Symbôles: $G(\Delta_{\mathfrak{E}}, M_{\mathfrak{E}})$, $G(\Delta_{\mathfrak{H}}, M_{\mathfrak{H}})$ et $G(\Delta_{\mathfrak{R}}, M_{\mathfrak{R}})$ respectivement.

C'est la sturcture géométrique hausdorffienne qui est à la base de ma théorie des multitreillis. Par ailleurs, la structure géométrique *discréte* (symbôle: $G(\Delta, M)$ où $\Delta, M$ sont définies par: $d\Delta A$ *équivant à* $d \in VA$ et $mMA$ équivalent à $m \in \Lambda A$) joue dans la présente théorie également un rôle important.

1.5.2. Les sturctures géométriques d'une configuration se laissent ordonner d'une manière naturelle: comme suit:
Je dirai qu'une structure géométrique $G(\Upsilon, \Sigma)$ de $\mathfrak{P}$ est *plus fine* qu'une structure géométrique $G(\Upsilon', \Sigma)$ de la même, en signes

$$G(\gamma', \Sigma') \leq G(\Upsilon, \Sigma) \qquad (*)$$

lorsque chaque $(\gamma', \Sigma')$-quadrilatère de $\mathfrak{P}$ est aussi un $(\Upsilon, \Sigma)$-quadrilatère (de $\mathfrak{P}$).
Ainsi, par exemple, on a toujours:

$$G(\Upsilon, \Sigma) \leq G(\Delta, M). \qquad (**)$$

La relation $\leq$ définie par (*) est une relation d'ordre partiel dans l'ensemble des structures géométriques de $\mathfrak{P}$. Et lorsqu'on a (*), je dirai également que $G(\Upsilon', \Sigma')$ est *moins fine que* ou *subordonnée à* $G(\Upsilon, \Sigma)$.

1.6. *Définition.* Je dirai qu'une structure géométrique $G(\Upsilon, \Sigma)$ est

1.6.1. *Raffinante,* lorsque pour tous les $a, b, u, v \in \mathfrak{P}$ tels que $u \geq a \geq v$ et $u \geq b \geq v$ il existe des éléments $d, m \in \mathfrak{P}$ tels que $u \geq d\Upsilon\{a, b\}$ et $v \leq m\Sigma\{a, b\}$.

1.6.2. *Conditionnellement raffinante,* lorsque pour tous les $a, b, u, v \in \mathfrak{P}$ tels que $u \geq a \geq v$ et $u \geq b \geq v$, l'existence d'un $d \in \mathfrak{P}$ tel que $u \geq d\Upsilon\{a, b\}$ équivant à l'existence d'un $m \in \mathfrak{P}$ tel que $v \leq m\Sigma\{a, b\}$.

1.6.3. *Partiellement monotone,* lorsque les deux conditions suivantes sont remplies

1. Pour tous les $a, a', a'', b, b', b'' \in \mathfrak{P}$ tels que $a\Upsilon\{a, b\}$, $b'\Sigma\{a', b\}$, $b' \geq b''\Sigma\{a'', b\}$ et $a' \geq a''$, il existe un $d \in \mathfrak{P}$ tel que $a \geq d\Upsilon\{a'', b\}$.

2. Pour tous les $a, a', a'', b, b', b'' \in \mathfrak{P}$ tels que $a'\Upsilon\{a'', b'\}$, $b''\Sigma\{a'', b'\}$, $a' \leq a\Upsilon\{a'', b\}$ et $b \geq b'$, il existe un $m \in \mathfrak{P}$ tel que $b'' \leq m\Sigma\{a'', b\}$.

1.6.4. *Analytique,* lorsque pour tous les $a, b, d, m, x \in \mathfrak{P}$ tels que $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$ et $d \geq x \geq m$, il existe des éléments $a_1, a' \in \mathfrak{P}$ tels que $d \geq a_1\Upsilon\{a, x\}$ et $m \leq a'\Sigma\{a, x\}$. L'unicité de $a_1(a')$ n'est pas requise.

1.6.5. *À interpolation cartésienne,* lorsque pour tous les $a, a_1, a', b, b_1, b', d, m \in \mathfrak{P}$ tels que

$$\begin{aligned}
&d\Upsilon\{a, b\}, \ m\Sigma\{a, b\}\\
&d \geq a_1 \geq a \geq a' \geq m, \ d \geq b_1 \geq b \geq b' \geq m\\
&a_1\Upsilon\{a, b'\}, \ a'\Sigma\{a, b_1\}\\
&b_1\Upsilon\{a', b\}, \ b'\Sigma\{a_1, b\}
\end{aligned}$$

on a $(a_1/b') \cap (b_1/a') \neq \phi$ (1.2.1).

1.6.6. *Naturelle,* lorsque pour tous les $a, b \in \mathfrak{P}$ tels que $a \geq b$ on a $a\Upsilon\{a, b\}$ et $b\Sigma\{a, b\}$.

1.6.7. *Fermée,* lorsque pour tous les $a, a_1, a', b, d, m \in \mathfrak{P}$ tels que $d\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$ et $d \geq a_1 \geq a \geq a' \geq m$, on a $d\Upsilon\{a_1, b\}$ et $m\Sigma\{a', b\}$.

1.6.8. *Saturée,* lorsque pour tous les $a, b, d, d', m, m' \in \mathfrak{P}$ tels que $d\Upsilon\{a, b\}$, $d'\Upsilon\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $m'\Sigma\{a, b\}$, $d \geq d'$ et $m \leq m'$, on a $d = d'$ et $m = m'$.

1.6.9. *À similitude,* lorsque pour tous les $a, b, d, m \in \mathfrak{P}$ tels que $d\Upsilon\{a, b\}$ et $m\Sigma\{a, b\}$, l'égalité $d = a$ équivant à $b = m$.

1.6.10. *Transitive,* lorsque pour tous les $a, a', a'', b, b', b'' \in \mathfrak{P}$ tels que $a\Upsilon\{a', b\}$, $b'\Sigma\{a', b\}$, $a'\Upsilon\{a'', b'\}$ et $b''\Sigma\{a'', b'\}$ on a $a\Upsilon\{a'', b\}$ et $b''\Sigma\{a'', b\}$.

1.6.11. *Relativement complémentée,* lorsque pour tous les $a, u, v, \in \mathfrak{P}$ tels que $u \geq a \geq v$, il existe un $b \in \mathfrak{P}$ tel que $u\Upsilon\{a, b\}$ et $v\Sigma\{a, b\}$.

1.6.12. *Complémenteé,* lorsque $\mathfrak{P}$ a un *premier* élément 0 et an dernier élément $I$ (donc $0 \leq a \leq I$ pour tout $a \in \mathfrak{P}$) et lorsque pour chaque $a \in \mathfrak{P}$ il existe un $a^* \in \mathfrak{P}$ tel que $I\Upsilon\{a, a^*\}$, $O\Sigma\{a, a^*\}$.

1.7. Les propriétés 1.6.1–1.6.12 sont parmi celles que j'ai appelées ailleurs *propriétés élémentaires d'incidence,* cf. [1] et [5]. Les propriétés de "position". D'ailleurs ces propriétés ne sont pas toutes indépendantes les unes des autres, ni ne sont toujours vérifiées par les structures géométriques usuelles (1.5.1).

Ainsi, par exemple, la structure géométriques hausdorffienne est toujours (cela veut dire *quelle que soit* la configuration $\mathfrak{P}$) naturelle, fermée, saturée et à similitude; il en est de même de la structure géométriques dédékindienne laquelle est, de plus, transitive. Mais la structure géométrique hausdorffienne n'est pas toujours transitive: cf. mon travail [6], 3.12.

Quant à la structure géométrique discrète elle est toujours raffinante, analytique, naturelle, fermée, partiellement monotone, transitive et relativement complémentée; mais elle n'est pas toujours saturée (sauf pour Ces $\mathfrak{P}$ où les relations $a, b \in \mathfrak{P}$ et $a \geq b$ entraînent $a=b$), ni à similitude non plus.

1.8. Voice quelques conséquences simples des propriétés d'incidence (1.6):

a) *Raffinement entraîne analyticité, naturalité et monotone partielle.*

b) *Analyticité et complémentation relative entraînent raffinement.*

c) *Fermeture et complémentation relative entraînent naturalité.* Cette proposition est due essentiellement à M. Milan Kolibiar.

d) *Naturalité et saturation entraînent la similitude.*

f) *Il en est de même de toute structure géométrique naturelle, fermée et à similitude ou bien fermée, à similitude et relativement complémentée. Toute structure géométrique raffinante et saturée est moins fine* (1.5.2) *que la structure géométrique hausdorffienne.*

e) *Analyticité, saturation et monotone partielle entraînent la fermeture.*

g) *Soit $\mathfrak{P}$ une configuration numie d'une $(\Upsilon, \Sigma)$-structure géométrique universelle* (donc telle que pour chaque couple $a, b \in \mathfrak{P}$ il y ait des éléments $d, m \in \mathfrak{P}$ tels que $d\Upsilon\{a, b\}$ et $m\Sigma\{a, b\}$), *conditionnellement raffinante et fermée. À supposer que la structure géométrique rieszienne de $\mathfrak{P}$ soit strictement moins fine que la discrète* (donc telle que $G(\varDelta_R, M_R) < G(\varDelta, M)$; cf. 1.5.2, (**)), *on peut trouver six éléments $e, e', f, f', u, v \in \mathfrak{P}$ tels que $u\Upsilon\{e, f\}$, $e\Upsilon\{e', f'\}$, $f\Upsilon\{e', f'\}$, $v\Sigma\{e', f'\}$, $e'\Sigma\{e, f\}$, $f'\Sigma\{e, f\}$ et tels encore que $e \not\geq f \not\geq e$* et $e' \not\geq f' \not\geq e'$. Ce ci généralise une proposition bien connue due à M. Ján Jakubík [10].

## Références

[1] Mihail Benado: Sur la théorie générale des ensembles partiellement ordonnés I, Manuscrit, Mars (1960).

[2] ——: Idem II, Manuscrit, Juillet (1960).

[3] ——: Idem III, Manuscrit, Août (1960).
[4] ——: Sur la théorie générale des ensembles partiellement ordonnés, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **247**, 2265–2268 (1958).
[5] ——: Sur la théorie générale des ensembles partiellement ordonnés (Rapport destiné au Colloque international de Théorie des ensembles ordonnés d'Oberwolfach, 26–30 Octobre 1959), à paraitre dans les Publications Scientifiques de l'Université d'Abger (en français) et dans les Acta de l'Université J. A. Coménius (en Russé).
[6] ——: Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier II (Theorie des multistructures), Czechoslovak Math. Journal, **5** (80), 308–344 (1955).
[7] ——: Bemerkungern zur Theorie der Vielverbände IV (Über die Möbius'sche Funktion) à paraitre dans les Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cf. aussi à ce sujet, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **247**, 2553, 863 (1958).
[8] ——: La théorie des multitreillis et son role en Algèbre et en Géométrie (Rapport destiné au Colloque international de Théorie des ensembles ordonnés d'Oberwolfach, 26–30 Octobre 1960), à paraitre aux mêmes endroits que le Rapport sans [5].
[9] Garrett Birkhoff: Lattice Theory, revised edition, New-York (1948).
[10] Ján Jakubík: Sur les axiomes des multistructures, Czechoslovak Math. Journal, **6** (81), 426–430 (1956).