140. *Sur le Théorème de Fubini et l'Intégrale (E. R.). I*

Par Shizu NAKANISHI

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1960)

Dans la Note précédente,[1] nous avons fait son étude de la propriété de Fubini de la suite fondamentale. Dans cette Note, nous allons étudier celle de l'intégrale (*E. R.*). Un résultat principal est la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit $f(x, y)$ une function intégrable (E. R.) dans l'intervalle $I_0=[a, b; c, d]$, définie par une suite fondamentale $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, où $f_{n+1}(x, y)$ s'écrit $f_{n+1}(x, y)=f_n(x, y)+r_n(x, y)+p_n(x, y)$. Supposons que la suite fondamentale satisfait, outre qu'elle satisfait aux conditions [1-3], (P) et (P*),[2] aux quatre conditions suivantes:*

(*) *Soit I_i $(i=1, 2,\cdots, i_0)$ un système de normbre fini de produits directs $[a, b]\times J_i$ $(J_i\subseteq[c, d])$ sans points commun deux à deux. Si, pour tout i, les extrémités de J_i appartiennent à l'ensemble proj. ${}_yF_n$, exclu un ensemble de mesure nulle N_0 ne contenant pas les points $y=c$ et d, on a*

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|\iint_{I_i} r_n(x, y)\, dx\, dy\right|<2^{-\nu_n}. \qquad (n=0, 1, 2,\cdots)$$

(P_1) *Pour tout produit direct $I=[a, b]\times J$ $(J\subseteq[c, d])$, il existe une fonction $\phi_I(n)$ de n $(n=0, 1, 2,\cdots)$ qui jouit des conditions suivantes:*

1) $\phi_I(n)>0$ *pour* $n=0, 1, 2,\cdots$;

2) $\lim_{n\to\infty}\phi_I(n)=0$;

3) *pour tout ensemble E contenu dans l'intervalle I et qu'on ait* $\operatorname{mes} E<\operatorname{mes}(I-F_n)$, *on a*

$$\iint_E |f_n(x, y)|\, dx\, dy\leq\phi_I(n);$$

4) *il existe une suite des nombres positives α_n $(n=0, 1, 2,\cdots)$ telle qu'on ait $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ et qu'on ait*

$$\sum_{i=1}^{i_0}\phi_{I_i}(n)\leq\alpha_n,$$

quel que soit le système de produits directs $I_i=[a, b]\times J_i$ $(i=1, 2,\cdots, i_0)$ $(J\subseteq[c, d])$ sans points commun deux à deux.

(P_1^*) *Pour presque tout y de $[c, d]$, il existe un entier positif*

---

1) S. Nakanishi: Sur le théorème de Fubini et les suites fondamentales, Proc. Japan Acad., **35**, 161-166 (1959).

2) Pour la définition, voir T. Ikegami: A note on the integration by the method of ranked spaces, Proc. Japan Acad., **34**, 16-21 (1958).

$k(y)$, $k(y)\geq 2$, qui possède la propriété suivante: on a, pour tout n suffisamment grand, dépendant de y, un nombre positif $\lambda(n, y)$ tel que si un intervalle J contenu dans $[c, d]$, contient le point y et la mesure de J est inférieure à $\lambda(n, y)$, on ait

$$k(y) \text{ mes } (I-F_{n+1})\geq \text{ mes } (I-F_n),$$

où $I=[a, b]\times J$.

(†) *Il existe un indice m tel que les points $y=c$ et d appartiennent à proj. ${}_yF_n$ pour tout $n\geq n_0$.*[3]

Alors, pour presque tout y de l'intervalle $[c, d]$,

$$f(x, y)=\lim_{n\to\infty} f_n(x, y)$$

est une fonction intégrable (E. R.) de x dans $[a, b]$, et on a

$$(E.\, R.)\int_a^b f(x, y)\, dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x, y)\, dx.$$

De plus, la fonction

$$g(y)=(E.\, R.)\int_a^b f(x, y)\, dx$$

est aussi intégrable (E. R.) dans $[c, d]$, et on a

$$(E.\, R.)\int_c^d g(y)\, dy=(E.\, R.)\iint_{I_0} f(x, y)\, dx\, dy.$$

D'abord, nous pouvons démontrer les deux Lemmes suivantes:

Lemme 1. Si une suite fondamentale $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n\, ; f_n)$, définie dans l'intervalle $I_0=[a, b\,; c, d]$, satisfait à la condition (P_1), il existe, pour presque tout y de $[c, d]$, une fonction $\phi(y, n)$ de n ($n=0, 1, 2,\cdots$) qui jouit des conditions suivantes:

1) $\phi(y, n)>0$ pour $n=0, 1, 2,\cdots$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\phi(y, n)=0$;
3) pour tout ensemble E contenu dans $[a, b]$ et tel qu'on ait mes $E<$ mes $([a, b]-F_n^y)$,[4] on a

$$\int_E |f_n(x, y)|\, dx\leq\phi(y, n).$$

Lemme 2. Si une suite fondamentale $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n\, ; f_n)$, définie dans l'intervalle $I_0=[a, b\,; c, d]$, satisfait à la condition (P_1^*), il existe, pour presque tout y de $[c, d]$, un entier positif $k_0(y)$, $k_0(y)\geq 2$, et un indice $m_0(y)$ qui satisfont à l'inégalité:

$$k_0(y) \text{ mes } ([a, b]-F_{n+1}^y)\geq \text{mes } ([a, b]-F_n^y)$$

pour tout $n>m_0(y)$.

En vertu du Lemme 1, du Lemme 2 et de la Proposition 1 de la Note précédente, on voit aussitôt le

3) Si $f(x, y)$ est une fonction définie dans un tore, la condition (†) n'est pas nécessaire.

4) On désigne par F_n^y l'ensemble $F_n\cap([a, b]\times(y))$.

Théorème 1. *Si une suite fondamentale* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, *définie dans l'intervalle* $I_0=[a, b; c, d]$, *satisfait, outre qu'elle satisfait aux conditions* [1–3], *aux trois conditions* $(*)$, (P_1) *et* (P_1^*), *pour presque tout* y *de l'intervalle* $[c, d]$, $f(x, y)=\lim_{n\to\infty} f_n(x, y)$ *est une fonction intégrable* (*E. R.*) *de* x *dans* $[a, b]$, *et on a*

$$(E.\,R.)\int_a^b f(x, y)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x, y)\,dx.$$

De plus, on a le

Théorème 2. *Soit* $f(x, y)$ *une fonction intégrable* (*E. R.*) *dans l'intervalle* $I_0=[a, b; c, d]$, *définie par une suite fondamentale* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, *qui satisfait aux conditions* $(*)$ *et* $(\dagger)$, *outre qu'elle satisfait aux conditions* [1–3]. *Alors,* $\int_a^b f_n(x, y)\,dx$ *tend vers un nombre fini pour presque tout* $y\in[c, d]$ *et la fonction*

$$g(y)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x, y)\,dx$$

est intégrable (*E. R.*) *dans l'intervalle* $[c, d]$. *On a*

$$(E.\,R.)\int_c^d g(y)\,dy=(E.\,R.)\iint_{I_0} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Démonstration. Dans cette démonstration, nous nous conformons à la convention de la démonstration de Proposition 1 dans la Note précédente. Nous pouvons poser

$$r_n(x, y)=\sum_{m=1}^{m_0}\lambda_{nm}C_{I_{nm}}(x, y),^{5)}$$

où $I_{nm}=[a_{nm}, b_{nm}; c_{nm}, d_{nm}]$, $\bigcup_{m=1}^{m_0} I_{nm}=[a, b; c, d]$, $I_{nm}^i\cap I_{nm'}^i=0$ $(m\neq m')$,[6] λ_{nm} est un nombre réel. Désignons par C l'ensemble: $\{c_{nm}, d_{nm};\ (n=1, 2,\cdots;\ m=1, 2,\cdots, m_0)\}$. Il permet de supposer que les points $y=0$ et 1 appartiennent à $\mathrm{proj.}_y F_n$ pour tout n. D'après la Note précédente, nous avons déjà vu que $\int_a^b f_n(x, y)\,dx$ tend vers un nombre fini presque partout. De plus, nous avons vu que, pour presque tout y, il existe un indice $m(y)$ tel qu'on ait pour tout $n\geq m(y)$

$$\left|\int_a^b r_{2n+1}(x, y)\,dx\right|<2^{-(\nu_{2n+1}-n)}.$$

On a $\nu_{2n+1}-n<\nu_{2(n+1)+1}-(n+1)$. Par suite, on voit aussitôt qu'il existe une suite non-décroissante d'ensembles fermés $\{A_m,\ m=0, 1, 2,\cdots\}$ qui satisfait aux conditions suivantes:

i) on a $A_m\subseteq proj._yF_{2m+1}$, $A_m\cap(N_0\cup C)=0$.

ii) on a $\mathrm{mes}([0, 1]-A_m)<\min(2^{-(\nu_{2m+1}-1)}, 2\,\mathrm{mes}([0, 1; 0, 1]-F_{2m+1}), (2k+1)\,\mathrm{mes}([0, 1]-A_m))$.

5) On désigne par $C_E(x, y)$ la fonction caractéristique d'un ensemble E.

6) Pour un ensemble E, E^i désigne son intérieur.

iii) pour tout ensemble A_m, il existe un indice $n_0(m)$ tel qu'on ait pour tout $n > n_0(m)$, $\left|\int_0^1 r_{2n+1}(x, y)\, dx\right| < 2^{-(\nu_{2n+1}-n)}$, quel que soit $y \in A_m$.

Posons $F_m^* = A_m$ $(m=0, 1, 2, \cdots)$. Alors, d'après la propriété iii) plus haut et la convention: $\nu_{2n+1} < \nu_{2n+2}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 r_{2n+1}(x, y)\, dx$ converge uniformément dans F_m^*. Donc, la fonction $\sum_{n=l}^{\infty} \int_0^1 r_{2n+1}(x, y)\, dx$, quel que soit l, est intégrable au sens de Lebesque dans F_m^*. Posons

$$f_0^*(y) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 r_{2n+1}(x, y)\, dx & \text{si } y \in F_0^* \\ 0 & \text{si } y \bar{\in} F_0^* \end{cases}$$

et pour tout m $(m=0, 1, 2, \cdots)$

$$r_m^*(y) = \begin{cases} \sum_{n=m}^{\infty} \int_0^1 r_{2n+1}(x, y)\, dx & \text{si } y \in F_{m+1}^* - F_m^* \\ \int_0^1 r_{2m+1}(x, y)\, dx & \text{si } y \bar{\in} F_{m+1}^* \\ 0 & \text{si } y \in F_m^*. \end{cases}$$

Alors, 1) $r_m^*(y)$ est intégrable au sens de Lebesque et on a

$$\left|\int_0^1 r_m^*(y)\, dy\right| < 2^{-(\nu_{2m+1}-1)}.$$

En effet, on a

$$\left|\int_0^1 r_m^*(y)\, dy\right| \leq \left|\int_{CF_m^*} \left(\int_0^1 r_{2m+1}(x, y)\, dx\right) dy\right|$$
$$+ \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_{F_{m+1}^* - F_m^*} \left|\int_0^1 r_{2n+1}(x, y)\, dx\right| dy.$$

A première terme, si l'on pose la suite d'intervalles contigus à l'ensemble fermé F_m^* dans $[0, 1]$ J_j $(j=1, 2, \cdots)$, on a $\left|\int_{CF_m^*} \left(\int_0^1 r_{2m+1}(x, y)\, dx\right) dy\right|$ $\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left|\int\int_{I_j} r_{2m+1}(x, y)\, dx\, dy\right| < 2^{-\nu_{2m+1}}$, où $I_j = [0, 1] \times J_j$ pour tout j. A deuxième terme, d'après le Théorème de Vitali, il existe une suite d'intervalles J_j $(j=1, 2, \cdots)$ jouissant des propriétés suivantes:

1°) les extrémités de J_j appartiennent à $F_{m+1}^* - F_m^*$ pour tout j;

2°) on a mes $((F_{m+1}^* - F_m^*) - \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j) = 0$;

3°) pour tout J_j, on a sign $\left(\int_0^1 r_{2n+1}(x, y)\, dx\right) =$ sign $\left(\int_0^1 r_{2n+1}(x, y')\, dx\right)$, quels que soient $y, y' \in J_j$.

Posons $I_j = [0, 1] \times J_j$. Alors, on obtient, pour tout $n \geq m+1$,

$\int\limits_{F^*_{m+1}-F^*_m} \left|\int r_{2n+1}(x, y)\, dx\right| dy \leq \sum_{j=1}^{\infty}\left|\int\int\limits_{I_j} r_{2n+1}(x, y)\, dx\, dy\right| < 2^{-\nu_{2n+1}}$. Par suite, on a l'inégalité voulue.

2) Posons pour tout m $(m=0, 1, 2, \cdots)$

$$f^*_m(y)=f^*_0(y)+\sum_{n=0}^{m-1} r^*_n(y).$$

On voit alors que pour tout ensemble E contenu dans $[0, 1]$ et tel qu'on ait $\operatorname{mes} E < \operatorname{mes}([0, 1]-F^*_m)$, on a

$$\int\limits_E |f^*_m(y)|\, dy \leq 2\,\phi(2m+1)+2^{-(\nu_{2m+1}-1)}.$$

En effet, on a

$$\int\limits_E |f^*_m(y)|\, dy = \int\limits_E \left(\left|\sum_{n=0}^{m-1}\int_0^1 r_{2n+1}(x, y)\, dx\right|\right) dy + \int\limits_{E\cap F^*_m} \left(\left|\sum_{n=m}^{\infty}\int r_{2n+1}(x, y)\, dx\right)dy,$$

où $\int\limits_E \left(\left|\sum_{n=0}^{m-1}\int_0^1 r_{2n+1}(x, y)\, dx\right|\right) dy \leq \int\int\limits_{[0,1]\times E} \left|f_{2m+1}(x, y)\right| dx\, dy \leq 2\,\phi(2m+1)$, puisqu'on a $\operatorname{mes}([0, 1]\times E)=\operatorname{mes}([0, 1]-F^*_m) < 2\operatorname{mes}([0, 1; 0, 1]-F_{2m+1})$. Pour deuxième terme, on a, de même que deuxième terme dans 1), $\sum_{n=m}^{\infty}\int\limits_{E\cap F^*_m} \left|\int r_{2n+1}(x, y)\, dx\right| dy < 2^{-(\nu_{2m+1}-1)}$.

Conséquemment, on voit que la fonction

$$g(y)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x, y)\, dx$$

est intégrable $(E.\,R.)$ dans $[0, 1]$.

3) Enfin, montrons qu'on ait

$$(E.\,R.)\int_0^1 g(y)\, dy=(E.\,R.)\int\int\limits_{I_0} f(x, y)\, dx\, dy.$$

On a

$$\left|\int f^*_m(y)\, dy-\int\int\limits_{I_0} f_{2m+1}(x, y)\, dx\, dy\right| \leq \sum_{n=m}^{\infty}\int\limits_{F^*_m}\left|\int_0^1 r_{2m+1}(x, y)\, dx\right| dy.$$

On a de plus, de même que deuxième terme dans 1), $\sum_{n=m}^{\infty}\int\limits_{F^*_m}\left|\int_0^1 r_{2n+1}(x, y)\, dx\right| dy < 2^{-(\nu_{2m+1}-1)}$. Donc, on obtient $\lim_{m\to\infty}\int_0^1 f^*_m(y) dy = \lim_{m\to\infty}\int\int\limits_{I_0} f_{2m+1}(x, y)\, dx\, dy$, d'où l'égalité voulue.

D'après le Théorème 1 et le Théorème 2, Proposition 1 résulte. De plus, on a le

Théorème 3. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, *une suite fonda-*

mentale définie dans l'intervalle $I_0=[a, b; c, d]$ *et qui satisfait à la condition suivante* (**):

(**) 1°) *Soit* I_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ *un système de nombre fini de produits directs* $[a, b]\times J_i$ $(J_i=[c, d])$ *sans points commun deux à deux. Si, pour tout* i, *l'une au moins des extrémités de* J_i *appartient à* proj.$\,_yF_n$, *on a pour tout* n

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|\iint_{I_i} r_n(x, y)\, dx\, dy\right|<2^{-\nu n}.$$

2°) *On a* $\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\iint_{CF_{n+1}}|r_m(x, y)|\,dx\,dy<2^{-\nu n+1}$ *pour tout* n.

3°) *On a* $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty}$ proj.$\,_yF_n=[c, d]$.

Alors, la fonction

$$g(y)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x, y)\, dx$$

est intégrable au sens de Denjoy dans l'intervalle $[c, d]$. *On a*

$$(D) \qquad \int_c^d g(y)\, dy=\lim_{n\to\infty}\iint_{I_0} f_n(x, y)\, dx\, dy.$$

D'après le Théorème 1 et le Théorème 3, il s'ensuit qu'on a la

Proposition 2. *Supposons que, dans la Proposition* 1, *une suite fondamentale* $u=\{u_n\}$ *satisfait à la condition* (**) *au lieu de la condition* (*). *Alors, la fonction*

$$g(y)=(E.\ R.)\int_a^b f(x, y)\, dx$$

est intégrable au sens de Denjoy dans $[c, d]$, *et on a*

$$(D) \qquad \int_c^d g(y)\, dy=(E.\ R.)\iint_{I_0} f(x, y)\, dx\, dy.$$