

151. Sur les Fonctions Plurisousharmoniques et les Barrières

Par Ikuo KIMURA

Université de Kôbe

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 12, 1960)

Introduction. Depuis que la notion de fonctions plurisousharmoniques a été introduite par MM. K. Oka [2] et P. Lelong [3], cette notion joue un grand rôle dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. D'autre part, M. H. Bremermann a récemment réussi à appliquer la méthode de Perron au problème de Dirichlet généralisé dans le champ de variables complexes [6]: il considère l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions plurisousharmoniques au lieu de celle de fonctions sousharmoniques ordinaires.

Le fait qu'il existe des fonctions correspondant aux barrières m'a conduit de chercher les caractères communs à ces fonctions, et de définir les barrières convenables dans la théorie des fonctions de plusieurs variables, et enfin d'obtenir leurs propriétés fondamentales.

Dans le n° 1, en introduisant le problème de Dirichlet conformément à M. Bremermann, nous donnons la définition de la régularité d'un point frontière du domaine ou celle du domaine au point de vue globale. Ensuite dans le n° 2, en modifiant très peu la définition classique des barrières, nous définissons les barrières correspondant au problème de Dirichlet et puis montrons que l'on peut démontrer l'équivalence entre la régularité d'un point frontière du domaine et l'existence d'une barrière à ce point, en suivant la méthode exposée dans le livre de M. Kellog. Dans le n° 3, nous donnons des démonstrations simples et courtes de quelques théorèmes obtenus par M. Bremermann. Et enfin, ce que la régularité du domaine entraîne la pseudoconvexité est démontré. Je me contente, cependant dans la présente Note, de considérer seulement des domaines univalents et bornés.

Pour terminer cette introduction, l'auteur se fait l'honneur d'exprimer ses remerciements sincères à Prof. Kunugi, qui a témoigné son intérêt pour ce travail et a bien voulu donner des suggestions importantes au cours de la préparation de cette Note.

Explication de notations. Dans toute la suite, D désigne un domaine univalent et borné dans l'espace de n variables complexes z_j , $j=1, \dots, n$, S sa frontière, et P, Q etc. des points de la fermeture \bar{D} de D .

1. **Problème de Dirichlet généralisé.** Commençons par rappeler la

Définition 1. Une fonction réelle $V(P)$ définie dans D est appelée *fonction plurisousharmonique dans D* , si elle satisfait aux conditions

suivantes:

1°. $-\infty \leq V(P) < \infty$ pour $P \in D$; on a $V(P) > -\infty$ en un point P de D au moins.

2°. $V(P)$ est semi-continu supérieurement dans D .

3°. Soit π un plan analytique quelconque; la restriction de $V(P)$ sur $\pi \cap D$ est sousesharmonique ou identiquement $-\infty$.

On définit de même les fonctions plurisurharmoniques.

On démontre facilement les

Lemme 1. Si une famille $\mathcal{F} = \{V\}$ de fonctions plurisousesharmoniques dans D est uniformément supérieurement bornée, la fonction $\limsup_{P \rightarrow P', \sup} \{V(P'); V \in \mathcal{F}\}$ est plurisousesharmonique dans D [4].

Lemme 2. Soit $g(P)$ une fonction plurisousesharmonique dans D telle que l'on ait $\lim_{P' \rightarrow P, P' \in D} g(P') \leq 0$ pour tout point P de S . On a $g(P) \leq 0$ pour tout point P de D .

Définition 1 bis. Nous appelons cette fonction *enveloppe supérieure* de la famille \mathcal{F} . On définit de même l'*enveloppe inférieure* d'une famille de fonctions plurisurharmoniques.

Notation. Soit $b(P)$ une fonction réelle continue sur S . Désignons par $\underline{L}(b, D)$ la famille des fonctions plurisousesharmoniques $g(P)$ dans D , telles que $\overline{\lim}_{P' \rightarrow P, P' \in D} g(P') \leq b(P)$ pour tout point P de S . On désigne de même par $\overline{L}(b, D)$ la famille des fonctions plurisurharmoniques $g(P)$ dans D , telles que $\underline{\lim}_{P' \rightarrow P, P' \in D} g(P') \geq b(P)$ pour tout point P de S .

Puisque la famille $\underline{L}(b, D)$ est bornée uniformément, d'après le Lemme 1, elle admet l'enveloppe supérieure, qui est plurisousesharmonique.

Définition 2. L'enveloppe supérieure de la famille $\underline{L}(b, D)$, qui sera désignée par $\underline{\Phi}(P; b, D)$, est appelée *solution inférieure du problème de Dirichlet relatif à D et $b(P)$* . La *solution supérieure* $\overline{\Phi}(P; b, D)$ du même problème est définie analogiquement partant de la famille $\overline{L}(b, D)$. (Quant aux Définitions 2 et 3, voir [6].)

Définition 3. Nous disons qu'un point Q de S est un *point frontière régulier* de D , si l'on a

$$(1) \quad \lim_{P \rightarrow Q, P \in D} \underline{\Phi}(P; b, D) = b(Q)$$

pour toute fonction continue $b(P)$ sur S .

Si la condition (1) est remplie en tout point Q de S par toute fonction continue $b(P)$ sur S , nous disons que D est un *domaine régulier*. Et lorsque la condition (1) n'est pas remplie à un point Q de S par une fonction $b(P)$, nous disons que Q est un *point frontière irrégulier*, ou que D est un *domaine irrégulier*.

Remarquons que l'égalité (1) peut-être remplacée par la suivante:

$$(2) \quad \lim_{P \rightarrow Q, P \in D} \overline{\Phi}(P; b, D) = b(Q).$$

2. **Barrières.** Donnons une nouvelle définition des barrières, qui s'énonce comme suit ([1], p. 326-328).

Définition 4. Soit Q un point de S ; une fonction $V(P, Q)$ est appelée *barrière au point Q pour le domaine D* , si elle satisfait aux conditions suivantes:

1°. $V(P, Q)$ est défini dans l'intersection de D et d'un voisinage de Q et y est plurisousharmonique.

2°. $\lim_{P \rightarrow Q, P \in D} V(P, Q) = 0$.

3°. Pour tout voisinage U de Q , on a

$$\inf_{P \in D-U} V(P, Q) > 0.$$

Cette définition est à peu près égale à celle d'une barrière ordinaire. On se ramène à la définition ordinaire de barrières dans le cas d'une variable, si l'on supprime le préfixe "pluri" dans la condition 1° de la définition.

Comme on le sait bien, étant donnée une barrière $V_0(P, Q)$, on peut construire une barrière $V(P, Q)$ pour tous les points P de D , et donc le problème d'existence d'une barrière pour un domaine D est d'un caractère local.

Théorème 1. *Pour qu'un point Q de S soit un point frontière régulier pour D , il faut et il suffit qu'il existe une barrière au point Q pour D .*

Ce Théorème est prouvé de la même façon que celle de M. Kellog, si l'on fait appel au Lemme 2 ([1], Théorème III, p. 327).

3. Applications. Définition 5. S'il existe une fonction $V(P)$ plurisousharmonique, deux fois continûment dérivable par rapport à toutes les variables dans un voisinage d'un point Q de S , et telle que la forme hermitienne

$$\sum_{j, k=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j d\bar{z}_k$$

soit positivement définie au point Q , et que les points P satisfaisant à $V(P) < 0$ forment un ensemble de la forme $D \cap U$, U désignant un certain voisinage de Q , nous disons que Q est un *point frontière strictement pseudoconvexe de D* [6].

Théorème 2. *Si Q est un point frontière strictement pseudoconvexe de D , Q est un point frontière régulier de D .*^{*)}

En effet, en suivant la méthode de M. Bremermann, prenons un nombre positif ε suffisamment petit, et posons $V(P, Q) = -V(P) + \varepsilon r^2$, où r est la distance euclidienne entre P et Q . La fonction $V(P, Q)$ est une barrière au point Q pour D . C.Q.F.D.

Soit D un polyèdre analytique $\{P; P \in V, |f_j(P)| < 1, j=1, \dots, \nu\}$, où V est un voisinage de \bar{D} et que $f_j, j=1, \dots, \nu$ sont des fonctions holomorphes dans V . Définissons l'ensemble $\sigma(j_1, \dots, j_n)$ de points P contenus dans V par les équations

^{*)} Les Théorèmes 2 et 3 sont obtenus par M. Bremermann. Voir [6], Théorème 4.1 et Théorème 5.3.

$$|f_{j_k}(P)|=1, \quad k=1, \dots, n,$$

et l'ensemble $\sigma(j_1, \dots, j_n; \theta_{j_1}, \dots, \theta_{j_n})$ de points P par les équations

$$f_{j_k}(P) = \exp(i\theta_{j_k}), \quad k=1, \dots, n,$$

où j_1, \dots, j_n sont des indices satisfaisant à $1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq \nu$, et que $\theta_{j_1}, \dots, \theta_{j_n}$ sont des nombres réels satisfaisant à $0 \leq \theta_{j_1} \leq 2\pi, \dots, 0 \leq \theta_{j_n} \leq 2\pi$. Remarquons que l'on a

$$\sigma(j_1, \dots, j_n) \bigcup_{0 \leq \theta_{j_1} \leq 2\pi, \dots, 0 \leq \theta_{j_n} \leq 2\pi} \sigma(j_1, \dots, j_n; \theta_{j_1}, \dots, \theta_{j_n}).$$

La surface frontière distinguée σ de D est, par définition, l'ensemble $\sigma = \bigcup_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq \nu} \sigma(j_1, \dots, j_n)$ ([6], §5).

Théorème 3. Soit D un polyèdre analytique, tel que tous les ensembles $\sigma(j_1, \dots, j_n; \theta_{j_1}, \dots, \theta_{j_n})$ soient vides ou de dimension nulle. Tous les points de la surface frontière distinguée σ sont réguliers ([6], Théorème 5.3).

Bien que la démonstration que voici emploie la fonction $\chi(\xi)$ utilisée par M. Bremermann, je crois qu'elle est plus simple que la sienne.

Preuve: Soit Q un point de la surface distinguée σ ; alors Q satisfait aux équations

$$f_{j_k}(Q) = \exp(i\theta_{j_k}), \quad k=1, \dots, n,$$

pour une combinaison fixe $(j_1, \dots, j_n; \theta_{j_1}, \dots, \theta_{j_n})$.

Posons $\chi(\xi) = (\xi + a)/(1 + a)$, où a est un nombre positif. Désignons par $g_j(P)$ la fonction $\chi(f_j(P) \exp(-i\theta_j))$; nous avons alors

$$g_j(P) = 1 \quad \text{pour } P \in \{P; f_j(P) = \exp(i\theta_j)\},$$

et

$$|g_j(P)| < 1 \quad \text{pour } P \in \{P; P \in \bar{D}, f_j(P) \neq \exp(i\theta_j)\}.$$

La fonction $V(P, Q) = -\sum_{k=1}^n \log |g_{j_k}(P)|$ est une barrière au point Q pour $D \cap U$, où U est un certain voisinage de Q . En effet, remarquons d'abord que $V(P, Q)$ est plurisurharmonique dans D , et que $V(Q, Q) = 0$. Pour $P \in \bar{D} - \sigma(j_1, \dots, j_n; \theta_{j_1}, \dots, \theta_{j_n})$ on a $V(P, Q) > 0$. Cela montre qu'en prenant U suffisamment petit, on a $V(P, Q) > 0$ pour $P \in \bar{D} \cap U - \{Q\}$, puisque $\sigma(j_1, \dots, j_n; \theta_{j_1}, \dots, \theta_{j_n})$ est de dimension nulle.

Or, puisque la régularité d'un point frontière est d'un caractère local, le point Q est régulier d'après le Théorème 1, ce qui achève la démonstration.

Soient $\pi_t, 0 \leq t \leq 1$ des ensembles définis par les équations

$$(3) \quad z_j = \varphi_j(\tau, t), \quad |\tau| \leq 1, \quad j=1, \dots, n,$$

où $\varphi_j(\tau, t), j=1, \dots, n$ sont des fonctions holomorphes par rapport à la variable τ dans le disque $|\tau| \leq 1$ pour tout t fixe dans l'intervalle fermé $[0, 1]$, et continues par rapport aux variables τ et t dans $|\tau| \leq 1, 0 \leq t \leq 1$. Désignons par $V(\pi_t)$ la variété continue des disques $\pi_t, 0 \leq t \leq 1$. Une variété $V(\pi_t)$ de la forme ci-dessus est appelée *variété distinguée* de disques dans D , lorsqu'elle remplit les conditions [5]:

$$\pi_t \subset D \text{ pour } 0 < t \leq 1, \text{ et } \text{Fr.}(\pi_0) \subset D.$$

Un domaine D est *pseudoconvexe*, si, pour toute variété distinguée $V(\pi_t)$ dans D , on a $\pi_0 \subset D$.

Théorème 4. *Tout domaine régulier est un domaine d'holomorphic.*

En effet, pour raisonner par l'absurde, supposons qu'il existe un domaine D régulier mais non pas d'holomorphic; D ne serait pas pseudoconvexe d'après le Théorème de M. K. Oka; donc nous pourrions trouver une variété distinguée $V(\pi_t)$ de disques $\pi_t, 0 \leq t \leq 1$ dans D , telle que l'on ait $O(=(\varphi_1(0, 0), \dots, \varphi_n(0, 0))) \notin D$. Pour simplifier l'exposition, écrivons simplement $P=P(\tau, t)$ au lieu de l'équation (3), et posons $A = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} \text{Fr.}(\pi_t)$. L'ensemble fermé A serait contenu dans D . D'autre part O serait un point frontière régulier de D ; il existerait une barrière $V(P, O)$ au point O pour D . On aurait par définition

$$(4) \quad \lim_{P \rightarrow O, P \in D} V(P, O) = 0,$$

et

$$\inf_{P \in D-U} V(P, O) > 0$$

pour un voisinage quelconque U de O , d'où $\inf_{P \in A} V(P, O) = m > 0$. $V(P, O)$ étant plurisurharmonique, nous aurions

$$(5) \quad V(P(0, t), O) \geq m \text{ pour } 0 < t \leq 1.$$

De plus, on aurait, d'après (4),

$$(6) \quad \lim_{t \rightarrow 0} V(P(0, t), O) = 0.$$

Les relations (5) et (6) ne sont pas compatibles. C.Q.F.D.

La réciproque du Théorème précédent n'est pas vraie, ce qui est évident, car tous les domaines plans sont d'holomorphic.

Références

- [1] O. D. Kellog: Foundations of Potential Theory (1929).
- [2] K. Oka: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VI. Domaines pseudoconvexes, Tôhoku Math. J., **49** (1942).
- [3] P. Lelong: Les fonctions plurisousharmoniques, Ann. Ecole Norm. Sup., **62** (1945).
- [4] P. Lelong: Fonctions Plurisousharmoniques; Mesures de Radon Associées. Applications aux Fonctions Analytiques, Colloque sur les Fonctions de Plusieurs Variables, Bruxelles (1953).
- [5] H. Grauert und R. Remmert: Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete, Math. Zeitschrift, **67** (1957).
- [6] H. J. Bremermann: On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudo-convex domains. Characterization of Šilov boundaries, Trans. Amer. Math. Soc., **91** (1959).