30. *La Solvabilité de Certains Equations sur les Nombres Ordinaux Transfinis. I*

Par Sôkiti NAGAI

Institut de Mathématiques, l'Université d'Iwaté, Morioka, Japon

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., March 13, 1961)

Dans sa note,[1] M. W. Sierpiński a démontré qu'il n'existe aucune solution pour l'équation (A) $\varphi^2=\psi^3+1$ sur les nombres ordinaux transfinis φ et ψ, et en généralisant ce résultat, M. S. Świerczkowski[2] a démontré la même propriété pour l'équation (B) $\varphi^\vartheta=\psi^\iota+q$, où ϑ et ι sont les nombres ordinaux isolés qui sont plus large que 1, et q est un nombre naturel.[3]

En généralisant l'équation (A), nous discuterons les solutions d'équations telles qu'on ait

(E) $\varphi^{m_1}a_1+\varphi^{m_2}a_2+\cdots+\varphi^{m_p}a_p+a_{p+1}=\psi^{n_1}b_1+\psi^{n_2}b_2+\cdots+\psi^{n_q}b_q+b_{q+1}$,

où p, q; m_i, a_i $(1\leqq i\leqq p)$; n_j et b_j $(1\leqq j\leqq q)$ sont les nombres naturels tels que $m_{i-1}>m_i$ $(2\leqq i\leqq p)$ et $n_{j-1}>n_j$ $(2\leqq j\leqq q)$, et a_{p+1}, b_{q+1} sont les nombres finis. Or, sans perdre la généralité, nous pouvons supposer que φ soit plus large que ψ. Alors, on peut distinguer les quatre cas suivant que φ, ψ sont les nombres limites ou bien isolés. Or, si φ est isolé, nous avons

$$\begin{aligned}\varphi^{m_1}a_1+\varphi^{m_2}a_2+\cdots+\varphi^{m_p}a_p+a_{p+1}&\equiv(\bar\varphi^{m_1}a_1+\bar\varphi^{m_1-1}\nu+\cdots+\bar\varphi^{m_2+1}\nu)\\&+(\bar\varphi^{m_2}(a_2+\nu)+\bar\varphi^{m_2-1}\nu+\cdots+\bar\varphi^{m_3+1}\nu)+\cdots+(\bar\varphi^{m_p}(a_p+\nu)+\bar\varphi^{m_p-1}\nu\\&+\cdots+\bar\varphi\nu)+(a_{p+1}+\nu),^{4)}\end{aligned}$$

où $\varphi=\bar\varphi+\nu$, $\bar\varphi$ est limite et ν est naturel.

Le but de cette note est de déterminer tous les types de l'équation (E) solvable et ses solutions correspondantes pour le cas fondamental où les solutions de l'équation (E) sont les nombres limites.

Or, la méthode de MM. Sierpiński et Świerczkowski employée dans les considérations des équations (A) et (B) est de comparer les deux côtés de l'équation donnée, en utilisant les formes normales de φ et ψ. Mais, elle est inconvenable pour traiter généralement l'équation (E), puisque la relation entre φ et ψ n'est pas précisée. Donc, en définissant les polynômes finis des nombres ordinaux transfinis dans la

1) W. Sierpiński: Sur l'équation $\xi^2=\eta^3+1$ pour les nombres ordinaux transfinis, Fund. Math., **43** (1956).

2) S. Świerczkowski: On some equation in transfinite ordinals, Fund. Math., **45** (1958).

3) Il y a encore une autre généralisation des résultats de Sierpiński:[1] Wang, Shuh Tang and Wang, Keh Shien: On some equations of ordinal numbers, Advancement in Mathematics, **3**, 646–649 (1957).

4) H. Bachmann: Transfinite Zahlen, 1955, §12, 1. Allgemeine Rechenregeln. Sur les calculs de cette Note, nous employons les règles de ce livre.

section 2, nous rechercherons les solutions de l'équation (E) au point de vue de trouver les conditions pour l'égalité de deux polynômes finis de φ et ψ.

Maintenant, posons

$$F(\varphi)\equiv\varphi^{m_1}a_1+\varphi^{m_2}a_2+\cdots+\varphi^{m_p}a_p,$$
$$G(\psi)\equiv\psi^{n_1}b_1+\psi^{n_2}b_2+\cdots+\psi^{n_q}b_q.$$

Alors, pour que l'équation (E) a la solution de nombres limites $\varphi=\xi$ et $\psi=\eta$, il faut et il suffit qu'elle remplit $a_{p+1}=b_{q+1}$ et

$$F(\xi)=G(\eta). \tag{E*}$$

Donc, nous traiterons désormais surtout sur l'équation (E*) pour les nombres limites ξ et η.

1. Posons tout d'abord les notations utilisées dans la suite.

Les lettres minscules latines en général, a_i, a_{jk}, $a^{(l)}$, $\bar{a}$, a' etc., κ, λ, μ, ν et κ_m, $\kappa^{(n)}$, $\bar{\kappa}$, κ' etc. signifient les nombres ordinaux positifs et finis autant que nous n'indiquons en particulier. Les lettres grecques excepté κ, λ, μ, ν, et α_i, $\bar{\alpha}$, α' etc. signifient les nombres ordinaux transfinis, ξ et η les nombres limites, particuliers tels que $\xi>\eta$.

Ensuite, les formes normales de ξ et η respectivement sont

$$\xi=\omega^{\gamma_1}\kappa_1+\tau, \quad \text{où} \quad \tau=\omega^{\gamma_2}\kappa_2+\cdots+\omega^{\gamma_{r'}}\kappa_{r'}, \tag{1.1}$$
$$\eta=\omega^{\alpha_1}\lambda_1+\delta, \quad \text{où} \quad \delta=\omega^{\alpha_2}\lambda_2+\cdots+\omega^{\alpha_r}\lambda_r, \tag{1.2}$$

et $(\eta)_j^i=\omega^{\alpha_i}\lambda_i+\omega^{\alpha_{i+1}}\lambda_{i+1}+\cdots+\omega^{\alpha_j}\lambda_j$ $(1\leqq i<j\leqq r)$.

Généralement, la représentation de ξ par rapport à η est

$$\xi=\eta^{\vartheta_1}\zeta_1+\varepsilon, \quad \text{où} \quad \varepsilon=\eta^{\vartheta_2}\zeta_2+\cdots+\eta^{\vartheta_t}\zeta_t+\zeta_{t+1}, \tag{1.3}$$

où $\xi\geqq\vartheta_1>\vartheta_2>\cdots>\vartheta_t>0, 0<\zeta_i<\eta\,(1\leqq i\leqq t)$, $0\leqq\zeta_{t+1}<\eta$ et $\zeta_{t+1}(>0)$ est un nombre limite.

Puis, la forme normale de ζ_1 est

$$\zeta_1=\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0, \text{ où } \sigma=\omega^{\beta_2}\mu_2+\cdots+\omega^{\beta_s}\mu_s(\geqq 0)\ (\alpha_1\geqq\beta_1\geqq 0,\ \mu_0\geqq 0),$$

et encore celles de α_1 et β_1 respectivement sont $\alpha_1=\omega^{\pi}d+\rho$, $\beta_1=\omega^{\pi'}h+\rho'$ $(\pi\geqq\pi')$.

2. D'après (1.1) et (1.2), on a

$$\xi^m a=\omega^{\gamma_1 m}\kappa_1 a+\omega^{\gamma_1(m-1)}\tau=\omega^{\gamma_1 m}\kappa_1 a+\omega^{\gamma_1(m-1)+\gamma_2}\kappa_2+\cdots+\omega^{\gamma_1(m-1)+\gamma_{r'}}\kappa_{r'} \tag{2.1}$$
(r' termes)

$$\eta^n b=\omega^{\alpha_1 n}\lambda_1 b+\omega^{\alpha_1(n-1)}\delta=\omega^{\alpha_1 n}\lambda_1 b+\omega^{\alpha_1(n-1)+\alpha_2}\lambda_2+\cdots+\omega^{\alpha_1(n-1)+\alpha_r}\lambda_r \tag{2.2}$$
(r termes).

Donc, en remplaçant les deux côtés de l'équation (E*) par ces formules, on voit que les deux cas suivants au plus sont seulement possible pour les solutions d'équation (E*): (i) $r'=tr$ $(t\geqq 1)$ et (ii) $r'=vz$, $r=uz$, $(v,u)=1$ et $u>1$.

Dans le cas (i), on a

$$\xi^{m_i}a_i=\eta^{n(i-1)t+1}b_{(i-1)t+1}+\eta^{n(i-1)t+2}b_{(i-1)t+2}+\cdots+\eta^{n_{it}}b_{it}\ (1\leqq i\leqq p). \tag{2.3}$$

Si $t>1$, nous posons $(i-1)t+j=ij$ et nous écrivons simplement

$$\xi^{m_i}a_i=\eta^{n_{i1}}b_{i1}+\eta^{n_{i2}}b_{i2}+\cdots+\eta^{n_{it}}b_{it}\ (1\leqq i\leqq p), \tag{2.3'}$$

où $n_{ij}>n_{i'j'}$ $(i<i')$ et $n_{ij}>n_{ij'}$ $(j<j')$. Alors, nous avons

$$(2.4)\qquad F(\xi)\equiv\sum_{i=1}^{p}\xi^{m_i}a_i,$$

$$G(\eta)\equiv\sum_{i=1}^{p}\eta^{n_i}b_i\ (t=1)\ \text{ou bien}\ G(\eta)\equiv\sum_{i=1}^{p}\{\eta^{n_{i1}}b_{i1}+\eta^{n_{i2}}b_{i2}+\cdots+\eta^{n_{it}}b_{it}\}\ (t>1).$$

Dans le cas (ii), écrivons simplement comme précédent

$$(2.5)\qquad f_i(\xi)=g_i(\eta)\ (1\leqq i\leqq t),$$

où $f_i(\xi)\equiv\xi^{m_{i1}}a_{i1}+\xi^{m_{i2}}a_{i2}+\cdots+\xi^{m_{iu}}a_{iu}\ (1\leqq i\leqq t)$,

$g_i(\eta)\equiv\eta^{n_{i1}}b_{i1}+\eta^{n_{i2}}b_{i2}+\cdots+\eta^{n_{iv}}b_{iv}\ (1\leqq i\leqq t)$.

Alors, nous avons

$$(2.6)\qquad F(\xi)\equiv\sum_{i=1}^{t}f_i(\xi),\quad G(\eta)\equiv\sum_{i=1}^{t}g_i(\eta).$$

Inversement, pour certains ξ et η, s'il existe m_i, a_i $(1\leqq i\leqq p)$, n_i et b_i $(1\leqq i\leqq p)$ ou n_{jk} et b_{jk} $(1\leqq j\leqq p,\ 1\leqq k\leqq t)$; ou bien m_{ij}, a_{ij} $(1\leqq i\leqq t,\ 1\leqq j\leqq u)$, n_{kl} et b_{kl} $(1\leqq k\leqq t,\ 1\leqq l\leqq v)$ satisfaisant respectivement à (2.3) ou à (2.3′) ou bien à (2.5), il est évident que l'équation (E*) correspondant respectivement à (2.4) ou bien à (2.6) est solvable et ξ, η est sa solution.

3. En correspondant aux deux cas des solutions de l'équation (E*), nous introduirons les définitions suivantes.

Définition 1. Soit ψ un nombre ordinal et transfini. Alors, nous dirons que

$$(3.1)\qquad \psi^{l_1}\nu_1+\psi^{l_2}\nu_2+\cdots+\psi^{l_t}\nu_t+\nu_{t+1},$$

où t, l_i et ν_i $(1\leqq i\leqq t)$ sont naturels, $l_{i-1}>l_i$ $(2\leqq i\leqq t)$ et ν_{t+1} est fini, est un *polynôme fini* de ψ.

Définition 2. Pour les nombres naturels m et a, et un nombre ψ ordinal et transfini, nous dirons qu'un nombre ordinal transfini φ dont $\varphi^m a$ peut être représenté par un polynôme fini de ψ, est *représentable finiment* par rapport à ψ.

D'après cette définition, $\varphi(\neq\psi)$ est un nombre ordinal plus large que ψ.

Définition 3. Soit φ un nombre ordinal transfini non représentable finiment par rapport à ψ et tel que $\varphi>\psi$. Si un polynôme fini de $\varphi\,(t\geqq 2)$ peut être représenté par un polynôme fini de ψ, nous dirons que φ est *représentable presque finiment* par rapport à ψ.

Si ξ est représentable finiment ou presque finiment par rapport à η, ν_{t+1} de (3.1) est évidemment égale à nulle.

Par exemple, un nombre ordinal φ tel que $\omega<\varphi<\omega^\omega$ est représentable finiment par rapport à ω, et $\xi=\omega^6+\omega^4+\omega^2$ n'est pas représentable finiment par rapport à $\eta=\omega^4+\omega^2$, mais représentable presque finiment par rapport à η, puisqu'on a $\xi^2+\xi=\eta^3+\eta^2+\eta$.

Or, on peut voir quelques propriétés concernant aux nombres représentables finiment ou presque finiment.

Lemme 1. *Supposons que φ soit représentable finiment ou presque finiment par rapport à ψ. Alors, si la représentation de φ par* *rapport à* ψ *est*

(3.2) $$\varphi=\psi^{\vartheta_1'}\zeta_1'+\psi^{\vartheta_2'}\zeta_2'+\cdots+\psi^{\vartheta_t'}\zeta_t'+\zeta_{t+1}',$$

où $\varphi\geqq\vartheta_1'>\vartheta_2'>\cdots>\vartheta_t'>0$, $0<\zeta_i'<\psi\ (1\leqq i\leqq t)$, $0\leqq\zeta_{t+1}'<\psi$, *on a* $\vartheta_1'<\omega$.

Donc, si ξ, η est la solution de l'équation (E*), nous pouvons poser

(3.3) $$\xi=\eta^{l_1}\zeta_1+\eta^{l_2}\zeta_2+\cdots+\eta^{l_t}\zeta_t+\zeta_{t+1},$$

où $\omega>l_1>l_2>\cdots>l_t>0$, $0<\zeta_i<\eta\ (1\leqq i\leqq t)$, $0\leqq\zeta_{t+1}<\eta$ et $\zeta_{t+1}(>0)$ est un nombre limite.

Lemme 2. *Soit,* ξ, η *la solution de l'équation* (E*). *Alors, dans* (3.3), *si la forme normale de* ζ_1 *est* $\zeta_1=\mu_0$ *ou bien* $\zeta_1=\omega^{\alpha_1}\mu_1+\sigma+\mu_0$ $(\mu_0\geqq 0)$, ξ *ne peut être représentable presque finiment par rapport à* η.

Donc, seulement pour le cas où $\zeta_1=\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0\ (0<\beta_1<\alpha_1,\ \mu_0\geqq 0)$, ξ peut être représentable presque finiment par rapport à η, et alors pour que ξ, η satisfait à l'équation (E*) en général, il y a le

Lemme 3. *Dans le lemme* 1, *si les formes normales de* ψ *et* ζ_1' *respectivement sont* $\psi=\omega^{\alpha_1'}\lambda_1'+\delta'$, $\zeta_1'=\omega^{\beta_1'}\mu_1'+\sigma'+\mu_0'$ $(0<\beta_1'<\alpha_1',\ \mu_0'\geqq 0)$, *et si l'on a* $\alpha_1'=\beta_1'+\bar{\alpha}'$, α_1', β_1' *et* $\bar{\alpha}'$ *sont les nombres ordinaux commutatifs par rapport à l'addition.*

Donc, sans perdre la généralité, dans le ces où $\zeta_1=\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0$ $(0<\beta_1<\alpha_1,\ \mu_0\geqq 0)$, nous pouvons supposer que β_1 soit commutatif à α_1 par rapport à l'addition.

Nous considérons ensuite les nombres représentables presque finiment. Alors, il y a le

Lemme 4. *Soit* ξ *représentable presque finiment par rapport à* η. *Alors, il en résulte que* $r'=rl+x$ $(0<x<r)$ *et aussi que les segments de* ξ, $(\xi)_{ri}^{1}\ (1\leqq i\leqq l)$ *sont tous représentables finiment par rapport à* η.

4. Dans cette section, nous expliquons quelques propriétés des polynômes finis relatifs à la solution de l'équation (E*). D'abord, nous avons la

Définition 4. Entre les deux polynômes finis $F(\xi)\equiv\sum_{i=1}^{p}\xi^{m_i}a_i$ et $G(\eta)\equiv\sum_{i=1}^{p}\eta^{n_i}b_i$ (où $m_1<n_1$ ou bien $m_1=n_1$ et $a_1<b_1$), si l'on a $\dfrac{n_i}{m_i}=e_1$ et $\dfrac{b_i}{a_i}=c_1$ $(1\leqq i\leqq p)$, où e_1 et c_1 sont constantes indépendants de i, nous dirons que $F(\xi)$ est *similaire* à $G(\eta)$.

Alors, nous avons le

Lemme 5. *Si* $F(\xi)$ *est similaire à* $G(\eta)$, *il existe une solution* ξ, η *d'équation* (E*) *dont* ξ *est représentable finiment par rapport à* η *et* $\xi^{m_i}a_i=\eta^{n_i}b_i$ $(1\leqq i\leqq p)$, *et inversement.*

Ensuite, nous considérons les nombres ξ représentables finiment par rapport à η où $t\geqq 2$ dans (2.3'). Pour expliquer le lemme 6, nous introduirons les

Définition 5. Si l'on a $n_{i1}-n_{ij}=e_j$ et $b_{ij}=c_j$ $(1\leqq i\leqq p,\ 2\leqq j\leqq t)$ pour un polynôme fini $G(\eta)\equiv\sum_{i=1}^{p}\{\eta^{n_{i1}}b_{i1}+\eta^{n_{i2}}b_{i2}+\cdots+\eta^{n_{it}}b_{it}\}$, nous dirons que $G(\eta)$ est *périodique* et t est son *période*.

Définition 6. Etant donné un polynôme fini $F(\xi)\equiv\sum_{i=1}^{p}\xi^{m_i}a_i$ et un polynôme périodique $G(\eta)\equiv\sum_{i=1}^{p}\{\eta^{n_{i1}}b_{i1}+\cdots+\eta^{n_{it}}b_{it}\}$, si $F(\xi)$ est similaire à $G_1(\eta)\equiv\sum_{i=1}^{p}\eta^{n_{i1}}b_{i1}$, nous dirons que $F(\xi)$ est *presque similaire* à $G(\eta)$.

Alors, nous avons le

Lemme 6. *Si ξ est représentable finiment par rapport à η et $\xi^{m_i}a_i=\eta^{n_{i1}}b_{i1}+\cdots+\eta^{n_{it}}b_{it}$ $(1\leqq i\leqq p,\ 2\leqq t)$, et si nous avons $F(\xi)\equiv\sum_{i=1}^{p}\xi^{m_i}a_i$ et $G(\eta)\equiv\sum_{i=1}^{p}\{\eta^{n_{i1}}b_{i1}+\cdots+\eta^{n_{it}}b_{it}\}$, $F(\xi)$ devient à presque similaire à $G(\eta)$ et il existe une solution ξ, η satisfaisant à l'équation* (E*).

Au contraire, l'équation $\xi^4+\xi^2=\eta^{12}+\eta^{11}+\eta^9+\eta^6+\eta^5+\eta^3$ n'a aucune solution limite ξ, η.

En concernant aux nombres ξ représentables presque finiment par rapport à η, nous le discutons plus loins.

5. Or, d'après les lemmes 1, 2 et 3, nous classifierons toutes les couples de ξ et η qui satisferont généralement à (3.3), et nous choisirons parmi chaque cas toutes les couples de ξ et η représentables finiment ou presque finiment. Ainsi, nous pouvons déterminer tous les types d'équations (E*) solvables et en même temps les solutions correspondantes.

(i) ζ_1 est fini, c'est-à-dire, $\zeta_1=\mu_0$,

(ii) $\beta_1=\alpha_1$, c'est-à-dire, $\zeta_1=\omega^{\alpha_1}\mu_1+\sigma+\mu_0$ $(\mu_0\geqq 0)$,

(iii) cas général, c'est-à-dire, $\zeta_1=\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0$ $(0<\beta_1<\alpha_1,\ \mu_0\geqq 0)$, où β_1 est commutatif à α_1 par rapport à l'addition (d'après le lemme 3).

6. Maintenant, nous considérons le cas où $\zeta_1=\mu_0$. D'après le lemme 2, il concerne seulement aux couples ξ et η représentables finiment. Alors, nous posons

$$\xi=\eta^{l_1}\nu_1+\varepsilon\ (\mu_0=\nu_1), \tag{6.1}$$

et nous le classifierons en trois sous-cas suivants:

(i) $\xi=\eta^{l_1}\nu_1+\eta^{l_2}\zeta_2+\cdots(l_2<l_1-1$, ou $l_2=l_1-1$ et $\zeta_2=\omega^{\beta}\mu+\cdots$ $(\beta<\alpha_1))$, c'est-à-dire, $\varepsilon+\eta^{l_1}\nu_1=\eta^{l_1}\nu_1$,

(ii) $\xi=\eta^{l_1}\nu_1+\eta^{l_1-1}\ (\omega^{\alpha_1}\mu'+\sigma')+\cdots$, c'est-à-dire, ζ_2 est un nombre limite,

(iii) $\xi=\eta^{l_1}\nu_1+\eta^{l_1-1}\ (\omega^{\alpha_1}\mu''+\sigma''+\mu_0'')+\cdots$, c'est-à-dire, ζ_2 est un nombre isolé.

Considérons d'abord le sous-cas (i). Pour que ξ est représentable finiment par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit

$$\xi=\eta^{l_1}\nu_1+\eta^{l_2}\nu_2+\cdots+\eta^{l_t}\nu_t, \tag{6.2}$$

où $t\geqq 1$, $l_{i-1}>l_i$ $(2\leqq i\leqq t)$ pour m et a arbitraires. Donc, nous avons

$$\sum_{i=1}^{p}\xi^{m_i}a_i=\sum_{i=1}^{p}\{\eta^{l_1m_i}\nu_1a_i+\eta^{l_1m_i-(l_1-l_2)}\nu_2+\cdots+\eta^{l_1m_i-(l_1-l_t)}\nu_t\}, \tag{6.3}$$

où $t(\leqq l_1)$, $m_i(m_{j-1}>m_j(2\leqq j\leqq p))$ et $a_i(1\leqq i\leqq p)$ sont arbitraires. Par suite, en revoyant (6.3) comme l'équation (E*), nous avons la

Proposition H_1. *Si l'équation* (E*) *remplit les conditions suivantes*:

(H_1') *$F(\xi)$ est similaire à $G(\eta)$ et e_1, c_1 sont les nombres naturels, où si $e_1=1$, $c_1\geqq 2$, ou bien $F(\xi)$ est presque similaire à $G(\eta)$ et e_1, c_1 sont les nombres naturels tels que $2\leqq t\leqq e_1$ et $e_t<e_1$, elle a au moins des solutions ξ, η satisfaisant aux conditions suivantes*:

$$(\mathrm{H}_1'')\qquad \xi=\eta^{\frac{n_1}{m_1}}\frac{b_1}{a_1}+\eta^{\frac{n_1}{m_1}-(n_1-n_2)}b_2+\cdots+\eta^{\frac{n_1}{m_1}-(n_1-n_t)}b_t,$$

où $1\leqq t\leqq \frac{n_1}{m_1}$, $\frac{n_1}{m_1}>n_1-n_t$ et η est un nombre limite et arbitraire.

Puis, pour le sous-cas (ii), pour que ξ est représentable finiment par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit

$$(6.4)\qquad \xi=\eta^{l_1}\nu_1+\eta^{l_1-1}(\omega^{a_1}\mu'+\delta)+\eta^{l_2}\nu_2+\cdots+\eta^{l_t}\nu_t,$$

où $\mu'<\lambda_1$, $t\geqq 1$, $l_2\leqq l_1-2$, $l_{i-1}>l_i$ $(3\leqq i\leqq t)$ pour m arbitraire et a tel que $\mu' a=\lambda_1\nu'$ (donc $\nu'<a$). De même que le sous-cas (i), nous avons la

Proposition H_2. *Si l'équation* (E*) *remplit les conditions suivantes*:

(H_2') *$F(\xi)$ est similaire à $G(\eta)$, e_1 est un nombre naturel et $c_1\,(>1)$ est un nombre fractionnaire, ou bien $F(\xi)$ est presque similaire à $G(\eta)$, e_1 est un nombre naturel tel que $2\leqq t\leqq e_1-1$, $e_2\geqq 2$ et $e_t<e_1$, et $c_1\,(>1)$ est un nombre fractionnaire, elle a au moins des solutions ξ, η satisfaisant aux conditions suivantes*:

$$(\mathrm{H}_2'')\qquad \xi=\eta^{\frac{n_1}{m_1}}\left[\frac{b_1}{a_1}\right]+\eta^{\frac{n_1}{m_1}-1}(\omega^{a_1}\mu'+\delta)+\eta^{\frac{n_1}{m_1}-(n_1-n_2)}b_2+\cdots+\eta^{\frac{n_1}{m_1}-(n_1-n_t)}b_t,$$

où $1\leqq t\leqq \frac{n_1}{m_1}-1$, $\frac{n_1}{m_1}=1$ entraîne $t=1$, $n_1-n_2\geqq 2$, $\frac{n_1}{m_1}>n_1-n_t$ et η est un nombre limite et arbitraire sauf λ_1 qui satisfait à $\frac{\mu'}{\lambda_1}=\frac{b_1}{a_1}-\left[\frac{b_1}{a_1}\right]$.

Enfin, pour le sous-cas (iii), pour que ξ est représentable finiment par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit

$$(6.5)\qquad \xi=\eta^{l_1}\nu_1+\eta^{l_2}(\omega^{a_1}\mu''+\delta+\nu_2)+\eta^{l_3}\nu_3+\cdots+\eta^{l_t}\nu_t,$$

où $t\geqq 2$, $\mu''<\lambda_1$, $\mu_0''=\nu_2$, $l_2=l_1-1$, $l_{i-1}>l_i\,(3\leqq i\leqq t)$, pour m arbitraire et a tel que $\mu'' a=\lambda_1\nu''$ (donc $\nu''<a$). Par suite, nous avons la

Proposition H_3. *Si l'équation* (E*) *remplit les conditions suivantes*:

(H_3') *$F(\xi)$ est presque similaire à $G(\eta)$, e_1 est un nombre naturel tel que $2\leqq t\leqq e_1$, $e_2=1$ et $e_t<e_1$, et $c_1(>1)$ est un nombre fractionnaire, elle a au moins des solutions ξ, η satisfaisant aux conditions suivantes*:

$$(\mathrm{H}_3'')\qquad \xi=\eta^{\frac{n_1}{m_1}}\left[\frac{b_1}{a_1}\right]+\eta^{\frac{n_1}{m_1}-(n_1-n_2)}(\omega^{a_1}\mu''+\delta+b_2)+\eta^{\frac{n_1}{m_1}-(n_1-n_3)}b_3 +\cdots+\eta^{\frac{n_1}{m_1}-(n_1-n_t)}b_t,$$

où $2\leqq t\leqq \frac{n_1}{m_1}$, $n_1-n_2=1$, $\frac{n_1}{m_1}>n_1-n_t$ et η est un nombre limite et arbitraire sauf λ_1 qui satisfait à $\frac{\mu''}{\lambda_1}=\frac{b_1}{a_1}-\left[\frac{b_1}{a_1}\right]$.