42. *La Solvabilité de Certains Equations sur les Nombres Ordinaux Transfinis. II*

Par Sôkiti NAGAI

Institut de Mathématiques, l'Université d'Iwaté, Morioka, Japon

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., April 12, 1961)

7. Dans la suite,[*] nous considérons le cas où $\zeta_1=\omega^{\alpha_1}\mu_1+\sigma+\mu_0$ $(\mu_0\geq 0)$. Encore pour ce cas, il concerne seulement aux couples ξ, η représentables finiment d'après le lemme 2, et nous le classifierons en deux sous-cas suivants:

(i) $\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\alpha_1}\mu_1+\sigma)+\varepsilon$, c'est-à-dire, ζ_1 est un nombre limite,

(ii) $\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\alpha_1}\mu_1+\sigma+\mu_0)+\varepsilon$, c'est-à-dire, ζ_1 est un nombre isolé.

Considérons d'abord le sous-cas (i). Pour que ξ est représentable finiment par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit

$$\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\alpha_1}\mu_1+\delta)+\eta^{l_2}\cdot\nu_2+\cdots+\eta^{l_t}\cdot\nu_t, \tag{7.1}$$

où $t\geq 1$, $\mu_1<\lambda_1$, $l_{i-1}>l_i(2\leq i\leq t)$, pour m arbitraire et a convenablement choisi. Donc, nous avons

$$\sum_{i=1}^{p}\xi^{m_i}\cdot a_i=\sum_{i=1}^{p}\{\eta^{(l_1+1)m_i}\cdot\nu_i'+\eta^{(l_1+1)m_i-(l_1+1-l_2)}\cdot\nu_2 +\cdots+\eta^{(l_1+1)m_i-(l_1+1-l_t)}\cdot\nu_t\}, \tag{7.2}$$

où $t(\leq l_1)$, $m_i(1\leq i\leq p)$ $(m_{j-1}>m_j(2\leq j\leq p))$ sont arbitraires et a_i $(1\leq i\leq p)$ sont choisis de façon que $\mu_1 a_i=\lambda_1\nu_i'$, où $\nu_i'<a_i$. Par suite, en revoyant (7.2) comme l'équation (E^*), nous avons la

Proposition I_1. *Si l'équation (E^*) remplit les conditions suivantes:*

(I_1') *$F(\xi)$ est similaire à $G(\eta)$, $e_1(\geq 2)$ est un nombre naturel et $c_1\,(<1)$ est un nombre fractionnaire, ou bien $F(\xi)$ est presque similaire à $G(\eta)$, $e_1\,(\geq 3)$ est un nombre naturel tel que $2\leq t\leq e_1-1$, $e_2\geq 2$ et $e_t<e_1$, et $c_1\,(<1)$ est un nombre fractionnaire,*

elle a au moins des solutions ξ, η satisfaisant aux conditions suivantes:

(I_1'') $\xi=\eta^{\frac{n_1}{m_1}-1}(\omega^{\alpha_1}\mu_1+\delta)+\eta^{\frac{n_1}{m_1}-(n_1-n_2)}\cdot b_2+\cdots+\eta^{\frac{n_1}{m_1}-(n_1-n_t)}\cdot b_t$,

où $1\leq t\leq\dfrac{n_1}{m_1}-1$, $n_1-n_2\geq 2$, $\dfrac{n_1}{m_1}>n_1-n_t$ *et η est un nombre limite et arbitraire sauf λ_1 qui satisfait à* $\dfrac{\mu_1}{\lambda_1}=\dfrac{b_1}{a_1}$.

Puis, pour le sous-cas (ii), pour que ξ est représentable finiment

[*] S. Nagai: La solvabilité de certains équations sur les nombres ordinaux transfinis. I, Proc. Japan Acad., 37, 121-126 (1961).

par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit

(7.3) $$\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\alpha_1}\mu_1+\delta+\nu_2)+\eta^{l_3}\cdot\nu_3+\cdots+\eta^{l_t}\cdot\nu_t,$$

où $t\geq 2$, $\mu_1<\lambda_1$, $\mu_0=\nu_2$, $l_3\leq l_1-1$, $l_{i-1}>l_i$ $(4\leq i\leq t)$, pour m arbitraire et a tel que $\mu_1 a=\lambda_1\nu''$, où $\nu''<a$. De même que le sous-cas (i), nous avons la

Proposition I_2. *Si l'équation* (E^*) *remplit les conditions suivantes:*

(I_2') $F(\xi)$ *est presque similaire à* $G(\eta)$, $e_1\,(\geq 2)$ *est un nombre naturel tel que* $2\leq t\leq e_1$, $e_2=1$ *et* $e_t<e_1$, *et* $c_1(<1)$ *est un nombre fractionnaire,*

elle a au moins des solutions ξ,η *satisfaisant aux conditions suivantes:*

(I_2'') $$\xi=\eta^{\frac{n_1}{m_1}-1}(\omega^{\alpha_1}\mu_1+\delta+b_2)+\eta^{\frac{n_1}{m_1}-(n_1-n_3)}\cdot b_3+\cdots+\eta^{\frac{n_1}{m_1}-(n_1-n_t)}\cdot b_t,$$

où $2\leq t\leq\dfrac{n_1}{m_1}$, $n_1-n_2=1$, $n_1-n_3\geq 2$, $\dfrac{n_1}{m_1}>n_1-n_t$ *et* η *est un nombre limite et arbitraire sauf* λ_1 *qui satisfait à* $\dfrac{\mu_1}{\lambda_1}=\dfrac{b_1}{a_1}$.

8. Maintenant, pour le cas général où $\zeta_1=\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0$ $(0<\beta_1<\alpha_1$, $\mu_0\geq 0)$, nous expliquons quelques propriétés concernant aux nombres représentables presque finiment. D'abord, nous posons la

Définition 7. Pour un polynôme périodique $G(\eta)$, si l'on a $e_j=(j-1)e_2$ et $c_j=c_0$ $(2\leq j\leq t)$, nous dirons que $G(\eta)$ est *périodique uniformément.*

Dès lors, nous pouvons préciser le lemme 4 comme suit:

Lemme 7. *Supposons qu'on ait* $r'=vz$, $r=uz$, $v>u>1$ *et* $(v,u)=1$ *pour le lemme 4. Alors, pour* t; $m_{ii'}$, $a_{ii'}$ $(1\leq i\leq t,\ 1\leq i'\leq u)$; $n_{jj'}$ *et* $b_{jj'}$ $(1\leq j\leq t,\ 1\leq j'\leq v)$ *convenablement choisis, on a*

(8.1) $$F(\xi)\equiv\sum_{i=1}^{t}\{\xi^{m_{i1}}a_{i1}+\cdots+\xi^{m_{iu}}a_{iu}\}=\sum_{i=1}^{t}\{\eta^{n_{i1}}b_{i1}+\cdots+\eta^{n_{iv}}b_{iv}\}\equiv G(\eta).$$

D'où, $F(\xi)$ *est périodique uniformément où* $e_2=1$ *et* $c_j=a_0$, *et* $G(\eta)$ *est périodique où* $c_j=b_0$. *Encore* $\sum_{i=1}^{t}\xi^{m_{i1}}a_{i1}$ *est similaire à* $\sum_{i=1}^{t}\eta^{n_{i1}}b_{i1}$, *où* $c_1=\dfrac{b_0}{a_0}$ *et* c_1 *est une constante.*

Encore pour l'utiliser plus loins, nous posons la

Définition 8. Pour deux polynômes périodiques uniformément $F(\xi)\equiv\sum_{i=1}^{t}\{\xi^{m_{i1}}a_{i1}+\cdots+\xi^{m_{iu}}a_{iu}\}$ et $G(\eta)\equiv\sum_{i=1}^{t}\{\eta^{n_{i1}}b_{i1}+\cdots+\eta^{n_{iv}}b_{iv}\}$, où $r'=vz$, $r=uz$, $1<u<v$, $(u,v)=1$, $a_{ii'}=a_0$ et $b_{jj'}=b_0$ $(1\leq i,j\leq t, 2\leq i'\leq u,$ $2\leq j'\leq v)$, si $\sum_{i=1}^{t}\xi^{m_{i1}}a_{i1}$ est similaire à $\sum_{i=1}^{t}\eta^{n_{i1}}b_{i1}$ et en même temps $e_1=\dfrac{v}{u}$ et $c_1=\dfrac{b_0}{a_0}$, où e_1 et c_1 sont constantes, nous dirons que $F(\xi)$ est *similaire rationnellement* à $G(\eta)$.

9. Dès lors, nous considérons le cas général où $\zeta_1=\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma+\mu_0$ $(0<\beta_1<\alpha_1,\ \mu_0\geq 0)$. Alors d'après les lemmes 2 et 3, ξ peut être représentable finiment et aussi presque finiment par rapport à η, et β_1 est commutatif à α_1 par rapport à l'addition. Donc, nous pouvons poser les formes normales de α_1, β_1, et $\bar{\alpha}$ tel qu'on ait $\alpha_1=\beta_1+\bar{\alpha}$, comme suit

$$\alpha_1=\omega^{\pi}d+\rho,\quad \beta_1=\omega^{\pi}h+\rho,\quad \bar{\alpha}=\omega^{\pi}(d-h)+\rho. \tag{9.1}$$

Maintenant pour ce cas, nous le classifierons en deux cas où $\mu_0=0$ et $\mu_0>0$ en général et encore, s'il en est nécessaire, nous considérons les sous-cas de ceux-ci. Ensuite, nous rechercherons l'existence des couples ξ, η représentables finiment ou presque finiment dans chaque cas, et alors, il faut envisager les deux sous-cas $\omega\leq\beta_1<\alpha_1$ et $\beta_1<\alpha_1<\omega$ (c'est-à-dire $\pi=\rho=0$, $\alpha_1=d$, $\beta_1=h$), mais nous aurons toujours le même résultat complètement sous ces sous-cas.

10. Voici le cas où $\zeta_1=\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma$. Pour ce cas, nous posons $\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma)+\varepsilon$. Alors, on doit discuter les deux propositions I et II. Voici d'abord la

(I) L'existence des couples ξ, η représentables finiment.

Considérons le sous-cas où $\omega\leq\beta_1<\alpha_1$. Dès lors, pour que ξ est représentable finiment par rapport à η, il faut et il suffit que ξ est développable comme suit, pour m et a convenablement choisis:

$$\xi=\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma)+\sum_{i=2}^{t}\eta^{l_i}(\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma), \tag{10.1}$$

où $t\geq 1$, $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_r^2$ $(r=s)$, $l_{i-1}>l_i$ $(2\leq i\leq t)$, $l_t\geq 0$,
ou bien

$$\xi=\{\eta^{l_1}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma)+\eta^{l_1-1}\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+1}\}+\sum_{i=2}^{t}\{\eta^{l_i}(\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma)+\eta^{l_i-1}\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+1}\}, \tag{10.2}$$

où $t\geq 1$, $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2$ $(r>s)$, $\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+1}\leq(\eta)_{r-s}^1$, $l_{i-1}>l_i$ $(2\leq i\leq t)$, $l_t>0$. Encore, lorsqu'on a $t\geq 2$, $l_2=l_1-1$ et $\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+1}=(\eta)_{r-s}^1$, il faut $\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_2+\sigma<(\eta)_r^{r-s+1}$ et s'il existe au moins un $i\,(\geq 3)$ tel que $l_i=l_{i-1}-1$, $\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+1}=(\eta)_{r-s}^1$ et $\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu_i+\sigma\geq(\eta)_r^{r-s+1}$, (10.2) ne coïncide pas avec la représentation de ξ par rapport à η et ces conditions sont compatibles. Donc, nous avons

$$\sum_{i=1}^{p}\xi^{m_i}a_i=\sum_{i=1}^{p}\{\eta^{l^{(i)}}\nu^{(i)}+\eta^{l^{(i)}-(l_1-l_2)}\nu_2+\cdots+\eta^{l^{(i)}-(l_1-l_t)}\nu_t\}, \tag{10.3}$$

où $r\geq s$, $t(\leq l_1+1$, où si $r>s$, $t\leq l_1)$ sont arbitraires, $m_i(1\leq i\leq p)$ $(m_{j-1}>m_j\,(2\leq j\leq p))$ sont choisis de façon que $\beta_1 m_i=\alpha_1 g_i$ (donc $m_i>g_i$) et $l_1 m_i+g_i=l^{(i)}$, a_i $(1\leq i\leq p)$ sont choisis de façon que $\mu_1 a_i=\lambda_1\nu^{(i)}$ et $l_t\geq 0$ (où si $r>s$, $l_t>0$). Par suite, en revoyant (10.3) comme l'équation (E^*), nous avons la

Proposition J. *Si l'équation* (E^*) *remplit les conditions suivantes*:

(J′) $F(\xi)$ *est similaire à* $G(\eta)$ *et* $e_1(>1)$ *est un nombre fractionnaire, ou bien* $F(\xi)$ *est presque similaire à* $G(\eta)$ *et* $e_1(>1)$ *est un*

nombre fractionnaire tel que $2 \leq t \leq [e_1]+1$ *et* $e_t \leq [e_1]$ ($t=[e_1]+1$ *entraîne* $e_t=[e_1]$),
elle a au moins des solutions ξ, η *satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$(\mathrm{J}'') \qquad \xi=\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma)+\sum_{i=2}^{t}\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)}(\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_i+\sigma),$$

où $r=s$, $1\leq t\leq\left[\frac{n_1}{m_1}\right]+1$, $n_1-n_t\leq\left[\frac{n_1}{m_1}\right]$, $\frac{h}{d}=\frac{n_1}{m_1}-\left[\frac{n_1}{m_1}\right]$, $\alpha_1=\omega^{\pi}d+\rho$, $\beta_1=\omega^{\pi}h+\rho$, $\bar{\alpha}=\omega^{\pi}(d-h)+\rho$, $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_r^2$ et $\frac{\mu_1}{\lambda_1}=\frac{b_1}{a_1}$,

ou bien

$$(\mathrm{J}''') \qquad \xi=\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]}(\omega^{\beta_1}\mu_1+\sigma)+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-1}\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+1}\}$$
$$+\sum_{i=2}^{t}\{\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)}(\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_i+\sigma)+\eta^{\left[\frac{n_1}{m_1}\right]-(n_1-n_i)-1}\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+1}\},$$

où $r>s$, $1\leq t\leq\left[\frac{n_1}{m_1}\right]$, $n_1-n_t<\left[\frac{n_1}{m_1}\right]$, $\frac{h}{d}=\frac{n_1}{m_1}-\left[\frac{n_1}{m_1}\right]$, $\alpha_1=\omega^{\pi}d+\rho$, $\beta_1=\omega^{\pi}h+\rho$, $\bar{\alpha}=\omega^{\pi}(d-h)+\rho$, $\omega^{\bar{\alpha}}\sigma=(\eta)_s^2$, $\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+1}\leq(\eta)_{r-s}^1$ et $\frac{\mu_1}{\lambda_1}=\frac{b_1}{a_1}$.
Encore, lorsqu'on a $t\geq 2$, $n_1-n_2=1$ et $\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+1}=(\eta)_{r-s}^1$, *il faut* $\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_2+\sigma<(\eta)_r^{r-s+1}$, *et s'il existe au moins un* $i(\geq 3)$ *tel que* $n_{i-1}-n_i=1$, $\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+1}=(\eta)_{r-s}^1$ et $\omega^{\beta_1}\lambda_1 b_i+\sigma\geqq(\eta)_r^{r-s+1}$, ξ *ne coïncide pas avec sa représentation par rapport à* η.

Puis, considérons le sous-cas où $\beta_1<\alpha_1<\omega$. Pour le sous-cas précédent, si nous posons $\pi=\rho=0$, c'est-à-dire, $\alpha_1=d$, $\beta_1=h$ et $\bar{\alpha}=d-h$, nous avons le même résultat complètement que le sous-cas précédent, et donc désormais, s'il n'en conduit pas les résultats différents, nous nous occuperons exclusivement du sous-cas où $\omega\leqq\beta_1<\alpha_1$.

Dans la suite, nous discutons la

(II) L'existence des couples ξ, η représentables presque finiment.

D'après le lemme 4, il suffit de considérer ξ tel que

$$(10.4) \qquad \xi=\xi'+\{\eta^{l_{t+1}}(\omega^{\beta_1}\lambda_1\nu'+\sigma)+\eta^{l_{t+1}-1}\omega^{\beta_1}(\eta)_r^{s+1}\}_j^1 \ (1<j<r),$$

où $t\geqq 1$, ξ' est (10.1), où $(\eta)_r^{s+1}=0$ et $l_{t+1}\geqq 0$, ou bien (10.2). Mais alors, nous pouvons démontrer qu'il n'y a aucune couple de ξ, η représentable presque finiment.