# 61. *Sur la Transformation de Fourier et la Dérivée Fonctionnelle*

Par Riichi IINO
Université de Waseda

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., May 13, 1961)

Dans cette note, nous allons définir la transformation de Fourier pour des fonctionnelles continues (non nécessairement linéaires) sur $S$ (l'espace des fonctions à valeurs complexes sur $R^n$, indéfiniment dérivables au sens usuel à décroissance rapide ainsi que chacune de leurs dérivées, muni de la topologie définie par L. Schwartz[1]), et étudier une relation entre la transformation de Fourier et la dérivée fonctionnelle (dérivée faible[2]).

1. Transformation de Fourier. Rappelerons d'abord la transformation de Fourier des distributions tempérées définie par L. Schwartz.[3] Soit $R_x^n$ (resp. $R_y^n$) l'espace vectoriel réel de dimension $n$ dont $x=(x_1, x_2,\cdots,x_n)$ (resp. $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$) sera un point de $R_x^n$ (resp. $R_y^n$). Désignerons par $S_x$ (resp. $S_y$) l'espace $S$ construit sur l'espace $R_x^n$ (resp. $R_y^n$) et par $S_x'$ (resp. $S_y'$) le dual fort de $S_x$ (resp. $S_y$). La transformation de Fourier $\mathcal{F}_x$ d'une distribution $U\in S_x'$ est définie par la formule de Parseval:

$$(1)\qquad \langle \mathcal{F}_x U, \varphi\rangle=\langle U, \mathcal{F}_y\varphi\rangle,\ \text{pour tout } \varphi\in S_y,$$

le crochet $\langle\, ,\rangle$ désignant la dualité entre $S$ et $S'$, où $\mathcal{F}_y\varphi$ s'exprime l'integrale $\int_{R_y^n}\varphi(y)\exp(-2\pi i x\cdot y)\,dy$, $x\cdot y$ désignant le produit scalaire $x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$ (on suppose que $R_x^n$ et $R_y^n$ sont mis en dualité par $x\cdot y$). La conjuguée $\overline{\mathcal{F}}_y$ de $\mathcal{F}_x$ est définie par

$$(2)\qquad \langle \overline{\mathcal{F}}_y V, \psi\rangle=\langle V, \overline{\mathcal{F}}_x\psi\rangle,\ \text{pour } V\in S_y' \text{ et } \psi\in S_x,$$

où $\overline{\mathcal{F}}_x\psi=\int_{R_x^n}\psi(x)\exp(2\pi i x\cdot y)\,dx$. On sait le fait suivant trouvé par L. Schwartz:[4] La transformation de Fourier $\mathcal{F}_x$ et sa conjuguée $\overline{\mathcal{F}}_y$ établissent entre $S_x'$ et $S_y'$ deux isomorphismes réciproques (algébriques et topologiques).

On va maintenant définir la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ d'une fonctionnelle continue $f$ définie sur $S_x$ par une formule suivante:

---

1) L. Schwartz: Théorie des Distributions, **2**, Hermann, Paris (1951).

2) R. Iino: Sur les dérivations dans les espaces vectoriels topologiques sur le corps des nombres complexes. I, Proc. Japan Acad., **35**, no. 7, 343-348 (1959); Ibid. II, **35**, no. 9, 530-535 (1959); Ibid. III, **36**, no. 1, 27-32 (1960).
Nous noterons par (I), (II), (III) ces notes, respectivement.

3) Voir L. Schwartz: Loc. cit. 1), Chap. VII.

4) L. Schwartz: Loc. cit. 1), Théorème XIII.

(3) $$(\mathcal{F}f)(\varphi)=f(\mathcal{F}_y\varphi), \text{ pour tout } \varphi\in S_y;$$

$\mathcal{F}f$ s'appelle transformée de Fourier de $f$. Cette définition est une généralization de la transformation de Fourier des distributions tempérées au-dessus (1). On voit facilement que $\mathcal{F}f$ est une fonctionnelle continue sur $S_y$; en effet, si des $\varphi_j$ convergent ver $\varphi$ dans $S_y$, leurs transformées de Fourier $\mathcal{F}_y\varphi_j$ convergent ver $\mathcal{F}_y\varphi$ dans $S_x$, donc des $f(\mathcal{F}_y\varphi_j)$ convergent ver $f(\mathcal{F}_y\varphi)$, $f$ étant une fonctionnelle continue sur $S_x$, enfin des $\mathcal{F}f(\varphi_j)$ convergent ver $\mathcal{F}f(\varphi)$.

Exemple. Soit $f(\varphi)=\{\varphi(0)\}^2$ pour tout $\varphi\in S_x$. $\mathcal{F}f(\varphi)=f(\mathcal{F}_y\varphi)$ $=\{(\mathcal{F}_y\varphi)(0)\}^2=\left\{\int_{R^n}\varphi(y)\,dy\right\}^2=\{\langle 1_y,\varphi\rangle\}^2$, où $1_y\equiv 1$ sur $R^n_y$.

De même façon qu'au-dessus, on définit la transformation réciproque $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ par: pour une fonctionnelle continue $g$ sur $S_y$,

(4) $$(\overline{\mathcal{F}}g)(\psi)=g(\overline{\mathcal{F}}_x\psi), \text{ pour tout } \psi\in S_x.$$

Il est clair que $\overline{\mathcal{F}}g$ est une fonctionnelle continue sur $S_x$. Si l'on identifie les variables $x$ et $y$, on a tout de suite la formule suivante:

(5) $$(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(\varphi)=(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f)(\varphi)=f(\varphi), \text{ pour tout } \varphi\in S.$$

Désignerons par $\mathcal{C}(S)$ l'ensemble formé des fonctionnelles continues définies sur $S$. Cet ensemble est un espace vectoriel complexe. Il est facile de voir que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ et sa conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$ établissent entre $\mathcal{C}(S_x)$ et $\mathcal{C}(S_y)$ deux isomorphismes (algébriques); si l'on identifie les variables $x$ et $y$, $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ définissent dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}(S)$ deux automorphismes réciproques.

Nous allons maintenant introduire dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}(S)$ la topologie de la convergence bornée, c'est-à-dire, la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $S$. Puisque l'espace vectoriel topologique $S$ est un espace de Montel[5)] (un espace localement convexe tonnelé[6)] séparé dans lequel toute partie bornée est relativement compacte), sur $\mathcal{C}(S)$ cette topologie coïncide avec la topologie de la convergence compacte (la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $S$), c'est-à-dire l'égalité $\mathcal{C}_b(S)=\mathcal{C}_c(S)$[7)] a lieu. Par conséquent, la topologie de la convergence bornée sur $\mathcal{C}(S)$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{C}(S)$, donc $\mathcal{C}_b(S)$ est un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. De plus il est évident que l'espace $\mathcal{C}_b(S)$ est un espace complet, car $\mathcal{C}_c(S)$ est complet: en effet, soit $u$ une fonctionnelle définie sur $S$, dont la restriction à toute partie compacte $A$ soit continue dans $A$; donc on

5) L. Schwartz: Loc. cit. 1), p. 91.

6) N. Bourbaki: Espaces Vectoriels Topologiques, Chap. III, Paris (1955).

7) On désigne par $\mathcal{C}_b(S)$ (resp. $\mathcal{C}_c(S)$) l'espace $\mathcal{C}(S)$ muni de la topologie de la convergence bornée (resp. compacte).

a immédiatement $u \in \mathcal{C}(S)$, car l'espace $S$ est un espace de Fréchet.[8]

On va maintenant montrer que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ et sa conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$ sont des applications continues de $\mathcal{C}_b(S)$ dans lui-même. Soit $V$ un voisinage de 0 dans $\mathcal{C}_b(S)$ défini par: $V=\{g; g\in\mathcal{C}(S), |g(\varphi)|\leq 1$, pour tout $\varphi\in B\}$, où $B$ une partie bornée de $S$. Comme $\mathcal{F}$ est une application linéaire de $S$ dans $S$, l'image $\mathcal{F}(B)$ de $B$ est aussi bornée dans $S$. Donc un ensemble $W=\{f, f\in\mathcal{C}(S), |f(\mathcal{F}\varphi)|\leq 1$, pour tout $\varphi\in B\}$ est évidemment un voisinage de 0 dans $\mathcal{C}_b(S)$, tel que l'on ait $\mathcal{F}W\subset V$, à grâce de la définition de la transformation de Fourier, ce qui montre que, si l'on identifie $S_x$ et $S_y$, $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{C}_b(S)$ dans lui-même. De même considération, on peut montrer que la conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ est aussi une application linéaire continue de $\mathcal{C}_b(S)$ dans lui-même.

Par conséquent, on peut dire que, si l'on identifie $S_x$ et $S_y$, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ et sa conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$ définissent dans l'espace vectoriel topologique $\mathcal{C}_b(S)$ deux automorphismes (algébriques et topologiques).

2. Relation entre la transformation de Fourier et la dérivée fonctionnelle. Soient $f$ une fonctionnelle définie sur $S$, $\varphi$, $h\in S_x$. On dit que $f$ a une dérivée fonctionnelle en un point $\varphi$ au long de $h$, si $f$ a une dérivée faible en $\varphi$ au long de $h$ au sens été défini dans la note (I). Pour la simplicité, on considéra désormais $f$ comme une fonctionnelle continue définie sur $S_x$, ayant dérivées fonctionnelles partout dans $S_x$ au long de $h$ pour tout $h\in S_x$. Donc on a le

Théorème. *La transformée de Fourier $\tilde{f}$ de $f$ est dérivable fonctionnellement partout dans $S_y$ au long de $k$ pour tout $k\in S_y$.*

Démonstration. Soient $\varphi$, $k$ deux éléments de $S_y$, $t$ une variable complexe. D'après la définition de la transformation de Fourier ((3), n° 1), $\tilde{f}(\varphi+tk)-\tilde{f}(\varphi)=f(\mathcal{F}_y(\varphi+tk))-f(\mathcal{F}_y\varphi)$ a lieu, donc on a immédiatement $\lim_{t\to 0}(\tilde{f}(\varphi+tk)-\tilde{f}(\varphi))/t=Df(\mathcal{F}_y\varphi)[\mathcal{F}_yk]$, ce qui montre que $f$ a une dérivée fonctionnelle en $\varphi$ au long de $k$, c.q.f.d.

D'après la démonstration-ci, on a

$$D\tilde{f}(\varphi)[k]=Df(\mathcal{F}_y\varphi)[\mathcal{F}_yk], \text{ pour tous } \varphi,\ k\in S_y. \tag{1}$$

Comme nous avons vu dans n° 2 de (II), $Df(\mathcal{F}_y\varphi)$ étant une distribution tempérée sur $R^n_x$, il aura lieu

$$D\tilde{f}(\varphi)[k]=\langle\mathcal{F}_xDf(\mathcal{F}_y\varphi),\ k\rangle, \text{ pour tous } \varphi,\ k\in S_y,$$

le crochet $\langle\ ,\ \rangle$ désignant la dualité entre $S_y$ et $S'_y$, ce qui montre

$$D\tilde{f}(\varphi)=\mathcal{F}_xDf(\mathcal{F}_y\varphi), \text{ pour tout } \varphi\in S_y. \tag{2}$$

Rappelerons ensuite le fait que, dans les conditions imposées à $f$,

---

8) Voir N. Bourbaki: Topologie Générale, Chap. X, pp. 22–23, Paris (1949).

la fonctionnelle $f$ est indéfiniment dérivable fonctionnellement partout dans $S$ et la dérivée d'ordre $m$ ($\geq 2$) $D^m f(\varphi)$ ($\varphi$ un élément arbitraire dans $S$) est une forme multilinéaire continue et symétrique définie sur $\prod_{i=1}^{m} E_i$, où $E_i = S$ ($1 \leq i \leq m$) (voir (II)). Bornons-nous ici à l'étudier le cas $m=2$; donc la dérivée fonctionnelle d'ordre 2 $D^2 f(\varphi)$ qui est une forme bilinéaire continue et symétrique sur $S_x \times S_y$ est l'objet d'étude. Soit $B(S_x, S_y)$ l'espace des formes bilinéaires continues sur $S_x \times S_y$; on a $B(S_x, S_y) = (S_x \hat{\otimes}_\pi S_y)' = (S_x \hat{\otimes}_\epsilon S_y)' = (S_{x,y})'$,[9] $S_{x,y}$ désignant l'espace $S$ sur $R_x^n \times R_y^n$. Donc on a $D^2 f(\varphi) \in S'_{x,y}$ (le dual de $S_{x,y}$).

Désignerons maintenant par $\mathcal{F}_x$ (resp. $\mathcal{F}_y$) la transformation de Fourier $S'_x \to S'_\xi$ (resp. $S'_y \to S'_\eta$) et utilisons la notion de la transformation de Fourier partielle:[10] pour tout $T_{x,y} \in S'_{x,y}$, l'on a $\mathcal{F}_x T_{x,y} \in S'_{\xi,y}$, $\mathcal{F}_y T_{x,y} \in S'_{x,\eta}$ et l'on a

(3) $$\mathcal{F}_x(\mathcal{F}_y T_{x,y}) = \mathcal{F}_y(\mathcal{F}_x T_{x,y}) \in S'_{\xi,\eta}.$$

Donc on peut écrire $\mathcal{F}_{x,y}$ (la transformation de Fourier $S'_{x,y} \to S'_{\xi,\eta}$) $= \mathcal{F}_x \otimes \mathcal{F}_y$, considérée comme un produit tensoriel des transformations de Fourier $\mathcal{F}_x$ et $\mathcal{F}_y$.

Nous allons traiter $D^2 f(\mathcal{F}_\xi \varphi)[\mathcal{F}_\xi h, \mathcal{F}_\eta k]$ où $\varphi$, $h \in S_\xi$, $k \in S_\eta$.[11] En vertu de la formule analogue à (6) de (II), on a immédiatement

$$D^2 f(\mathcal{F}_\xi \varphi)[\mathcal{F}_\xi h, \mathcal{F}_\eta k] = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{Df(\mathcal{F}_\xi \varphi + \mathcal{F}_\xi h)[\mathcal{F}_\eta k]}{t^2} dt,$$

où $t$ une variable complexe, $r$ un nombre réel positif quelconque (n° 2, (II)). Donc, d'après la formule (1), on a

$$D^2 f(\mathcal{F}_\xi \varphi)[\mathcal{F}_\xi h, \mathcal{F}_\eta k] = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{\mathcal{F}_y Df(\mathcal{F}_\xi \varphi + t\mathcal{F}_\xi h)[k]}{t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{D\tilde{f}(\varphi + th)[k]}{t^2} dt = D^2 \tilde{f}(\varphi)[h, k].$$

Par conséquent, d'après (3), on a

(4) $$\mathcal{F}_{x,y} D^2 f(\mathcal{F}_\xi \varphi) = \mathcal{F}_x \otimes \mathcal{F}_y D^2 f(\mathcal{F}_\xi \varphi) = D^2 \tilde{f}(\varphi),$$

considérée comme une distribution tempérée en $\xi$, $\eta$. Pour les dérivées d'ordre $m \geq 3$, on aura des formules analogues à (4).

Finalement remarquons que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ et sa conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$ définissent dans l'espace vectoriel topologique complet $D_c(S)$[12] été introduit dans n° 2 (III) deux automorphismes réciproques.

---

9) On signifie par le symbole $\hat{\otimes}_\pi$ (resp. $\hat{\otimes}_\epsilon$) le produit tensoriel projectif (resp. biprojectif) complété. Voir, par exemple, L. Schwartz: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Séminaire Schwartz, Faculté des Science de Paris (1953-1954).

10) L. Schwartz: Loc. cit. 9), exposé n° 20.

11) $\mathcal{F}_\xi$ (resp. $\mathcal{F}_\eta$) s'exprime la transformation de Fourier $S_\xi \to S_x$ (resp. $S_\eta \to S_y$).

12) $D_c(S)$ est un espace de toutes les fonctionnelles continues sur $S$, fonctionnellement dérivables partout dans $S$ au long de $h$ pour tout $h$ dans $S$, muni de la topologie de la convergence compacte.