76. *Sur la Dérivation d'une Intégrale E. R. Indéfinie*

Par Shizu NAKANISHI

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., June 12, 1961)

La Théorie de l'intégrale s'est dévelopée, comme on sait, dans deux directions différentes, dont l'une correspond à la notion d'intégrale définie et l'autre à celle de fonction primitive. L'intégrale de Lebesgue, issue, d'une part, de l'idée d'intégrale définie de Leibniz, Cauchy et Riemann, peut être regardée, d'autre part, comme une généralisation de la notion newtonienne de fonction primitive, puisqu'elle satisfait à l'égalité fondamentale $F'(x)=f(x)$ si l'on néglige un ensemble de mesure nulle. *L'intégrale E. R.**) *est définie comme limite des intégrales des fonctions en escalier. Mais, nous verrons qu'elle ne possède pas la propriété newtonienne généralisée de fonction primitive.* Nous la montrerons par un exemple.

Construirons une fonction intégrable *E. R.* dans l'intervalle $[0,1]=[0\leq x\leq 1]$ telle que l'intégrale *E. R.* indéfinie n'est pas dérivable en tout point d'un ensemble de mesure positive.

Considérons l'ensemble non-dense parfait de Harnack H_4 contenu dans l'intervalle $[0,1]$. Soient I_{ni} $(n=1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,2^{n-1})$ la suite d'intervalles ouverts définie comme il suit:

I_{11} est l'intervalle ouvert $c_{11}<x<d_{11}$ tel que $\frac{c_{11}+d_{11}}{2}=\frac{1}{2}$ et $d_{11}=c_{11}+\frac{1}{4}$. I_{2i}, $i=1,2$, soit les intervalles ouverts $c_{2i}<x<d_{2i}$ tels que $\frac{c_{21}+d_{21}}{2}=\frac{c_{11}}{2}$, $\frac{c_{22}+d_{22}}{2}=d_{11}+\frac{c_{11}}{2}$ et $d_{2i}=c_{2i}+\frac{1}{4^2}$. I_{3i}, $i=1,2,3,4$, soit les intervalles ouverts $c_{3i}<x<d_{3i}$ tels que $\frac{c_{31}+d_{31}}{2}=\frac{c_{21}}{2}$, $\frac{c_{32}+d_{32}}{2}=d_{21}+\frac{c_{21}}{2}$, $\frac{c_{33}+d_{33}}{2}=d_{11}+\frac{c_{21}}{2}$, $\frac{c_{34}+d_{34}}{2}=d_{22}+\frac{c_{21}}{2}$ et $d_{3i}=c_{3i}+\frac{1}{4^3}$, et ainsi de suite.

Posons $I_n=\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} I_{ni}$. Désignons les intervalles fermés contigus à l'ensemble I_n et contenus dans $[0,1]$, en comptant toujours de gauche à droite, par J_{ni}, $i=1,2,\cdots,2^n$. Posons

$$J_n(+)=\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} J_{n,2k-1} \text{ et } J_n(-)=\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} J_{n,2k}.$$

*) Pour la définition, voir Kinjirô Kunugi: Sur une généralisation de l'intégrale, Fundamental and Applied Aspects of Mathematics, Research Institute of Applied Electricity, Hokkaido University, 1-30 (1960).

Puis, posons

$$r_0(x)=\begin{cases}2 & \text{pour } x\in I_1\\ 0 & \text{pour tous les autres } x\end{cases}$$

et pour $n=1,2,\cdots$

$$r_n(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{n+1}}{n+1} & \text{pour } x\in I_{n+1}\cap J_{2^{m(n)}-1}(+)\\ -\dfrac{2^{n+1}}{n+1} & \text{pour } x\in I_{n+1}\cap J_{2^{m(n)}-1}(-)\\ 0 & \text{pour tous les autres } x,\end{cases}$$

où $m(n)$ est le plus grand des nombres naturels m' tels que $2^{m'}\leq n+1$. Désormais, désignons simplement par α_l le nombre naturel 2^l. Nous verrons que la fonction $f(x)$ définie par $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}r_n(x)$ jouit de la propriété voulue.

Soit F_0 l'ensemble non-dense parfait de Harnack H_4 contenu dans $[0,1]$ et F_n, $n=1,2,\cdots$, l'ensemble-somme $F_0\cup(\bigcup_{m=1}^{n}I_m)$, et posons $f_0(x)\equiv 0$ et $f_n(x)=\sum_{m=0}^{n-1}r_m(x)$, $n=1,2,\cdots$. Alors, $r_n(x)$ s'annule pour tout x appartenant à F_n. Si E est un ensemble contenu dans $[0,1]$ et dont la mesure est inférieur à celle de $[0,1]-F_n$, on a $\int_E|f_n(x)|\,dx =\int_E|\sum_{m=0}^{n-1}r_m(x)|\,dx\leq \frac{2^n}{n}\cdot$ mes $([0,1]-F_n)=\frac{1}{2n}$. Considérons un intervalle $[c,d]$ tel qu'on ait $c\in F_0$ et $d\in F_0$. Puisqu'alors, pour tout n, les extrémités c et d appartiennent à l'ensemble-somme $\bigcup_{i=1}^{2^{\alpha_{m(n)}-1}}J_{\alpha_{m(n)}-1,i}$, on a $\left|\int_c^d r_n(x)dx\right|\leq 3\left|\int_{J_{\alpha_{m(n)}-1,1}} r_n(x)dx\right|\leq\frac{3}{(n+1)\,2^{\alpha_{m(n)}}}$. On a de plus $6\cdot$mes $([c,d]-F_{n+1})\geq$ mes $([c,d]-F_n)$ et mes $([c,d]-F_n)\leq 2^{-(n+1)}$. Donc, la fonction $f(x)$ est intégrable $E. R.$ dans l'intervalle $[c,d]$. Ensuite, on voit que $f(x)$ est intégrable $E. R.$ dans l'intervalle quelconque contenu dans $[0,1]$.

Posons $F(x)=(E.R.)\int_0^x f(x)dx$, et montrons maintenant qu'on ait $\bar{D}F(x)\neq\underline{D}F(x)$ en tout point x de l'ensemble F_0 de mesure positive. Soit $x\in F_0$, alors, il existe, pour tout $m=3,4,\cdots$, un intervalle $J_{\alpha_m-1,i}$ contenant x. Posons simplement $J_{\alpha_m-1,i}=[a_m,b_m]$. Désignons, par h_m un des nombres a_m-x_0 et b_m-x_0 tel que $|h_m|$ coïncide avec la plus grande valeur des $|a_m-x_0|$ et $|b_m-x_0|$. On a d'abord $|h_m|\leq|J_{\alpha_m-1,i}| =\frac{1}{2^{\alpha_m}}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha_m-1}}\right)$. Puis, on a

$$|F(x+h_m)-F(x)|\geq\left|\sum_{n=\alpha_m-1}^{2\alpha_m-2}\int_x^{x+h_m}r_n(x)dx\right|-\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\left|\sum_{n=\alpha_m+l-1}^{2\alpha_m+l-2}\int_x^{x+h_m}r_n(x)dx\right|\right\}$$
$$\geq\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4^{\alpha_m}}\cdot\frac{2^{\alpha_m}}{\alpha_m}+\frac{2}{4^{\alpha_m+1}}\frac{2^{\alpha_m+1}}{\alpha_m+1}+\cdots+\frac{2^{\alpha_m-1}}{4^{2\alpha_m-1}}\frac{2^{2\alpha_m-1}}{2\alpha_m-1}\right\}$$
$$-\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{4^{\alpha_m+l}}\cdot\frac{2^{\alpha_m+l}}{\alpha_{m+l}}+\frac{2}{4^{\alpha_m+l+1}}\cdot\frac{2^{\alpha_m+l+1}}{\alpha_{m+l}+1}+\cdots+\frac{2^{\alpha_m+l-1}}{4^{2\alpha_m+l-1}}\frac{2^{2\alpha_m+l-1}}{2\alpha_{m+l}-1}\right\}$$
$$\geq\frac{1}{2^{\alpha_m+2}}-\frac{1}{2^{\alpha_m+l-1}}.$$

Par conséquent, on a, pour $m=3,4,\cdots$, $|F(x+h_m)-F(x)|/|h_m|>\frac{1}{8}-\frac{1}{2^{\alpha_m}}$. Donc, on a $\overline{\lim_{h\to 0}}|F(x+h)-F(x)|/|h|\geq\frac{1}{8}$.

D'autre part, on a $\underline{\lim}_{h\to 0}|F(x+h)-F(x)|/|h|=0$. En effet, pour le cas où le point x appartient à l'intervalle $[a_m, c_{\alpha_m,i}]$, si i est impair, on a toujours $b_m=c_{\alpha_m-1,j}$, $j=\frac{i+1}{2}$. Dans ce cas, si l'on pose $h_m=2(b_m-x)+\frac{1}{4^{\alpha_m-1}}$, on a $|h_m|\geq|J_{\alpha_m-1,i}|\geq\frac{1}{2^{\alpha_m}}$ et on a $|F(x+h_m)-F(x)|=\frac{1}{4^{\alpha_m-1}}\cdot\frac{2^{\alpha_m-1}}{\alpha_m-1}=\frac{1}{2^{\alpha_m-1}(\alpha_m-1)}$. Par suite, on a $|F(x+h_m)-F(x)|/|h_m|<\frac{2}{\alpha_m-1}$. Pour le cas où i est pair, nous pouvons d'abord considérer le cas où $b_m=c_{\alpha_m-2,j}$, $j=\frac{i+2}{4}$. Dans ce cas, si l'on pose $h_m=2(b_m-x)+\frac{1}{4^{\alpha_m-2}}$, on a $|h_m|>\frac{1}{2^{\alpha_m}}$ et on a $|F(x+h_m)-F(x)|=\frac{1}{4^{\alpha_m-2}}\cdot\frac{2^{\alpha_m-2}}{\alpha_m-2}=\frac{1}{2^{\alpha_m-2}(\alpha_m-2)}$. Par suite, on a $|F(x+h_m)-F(x)|/|h_m|<\frac{4}{\alpha_m-2}$. Enfin, considérons le cas où i est pair et $b_m\neq c_{\alpha_m-2,j}$, $j=\frac{i+2}{4}$. Alors, si l'on pose $h_m=-\left\{2|J_{\alpha_m-1,i}|+\frac{1}{4^{\alpha_m-1}}+\frac{1}{4^{\alpha_m-2}}\right\}$ on aura $|F(x+h_m)-F(x)|=\frac{1}{4^{\alpha_m-1}}\cdot\frac{2^{\alpha_m-1}}{\alpha_m-1}+\frac{1}{4^{\alpha_m-2}}\cdot\frac{2^{\alpha_m-2}}{\alpha_m-2}=\frac{1}{2^{\alpha_m-1}(\alpha_m-1)}+\frac{1}{2^{\alpha_m-2}(\alpha_m-2)}$. Par suite, on a $|F(x+h_m)-F(x)|/|h_m|<\frac{1}{\alpha_m-1}+\frac{2}{\alpha_m-2}<\frac{3}{\alpha_m-2}$. Par coséquent, pour le cas où $x\in[a_m, c_{\alpha_m-1,i}]$, il existe toujours un nombre h_m tel qu'on ait $|h_m|<\frac{1}{2^{\alpha_m-4}}$ et $|F(x+h_m)-F(x)|/|h_m|<\frac{4}{\alpha_m-2}$. Il en est de même pour le cas où $x\in[d_{\alpha_m-1,i}, b_m]$. Donc, pour tout point x appartenant à F_0, on a toujours $\underline{\lim}_{h\to 0}|F(x+h)-F(x)|/|h|=0$.