150. *Sur la Réduction Modulo $\mathfrak{p}$ de Certains Ensembles Algébriques*

Par Akiko YOSHIOKA
Osaka Prefectural University

(Comm. by K. SHODA, M.J.A., Nov. 12, 1962)

1. D'après C. Chevalley, on se propose un problème suivant: Soit k un corps muni d'une famille de valuations discrètes v_λ. Soient U, V des variétés algébriques définies sur k et f une application rationnelle partout définie de U dans V. Désignons par A_e, e un entier arbitraire, l'ensemble des points (y) de V tels que $f^{-1}(y)$ soit de codimension $\leqq e$ dans U. Soient $\bar{U}^{(\lambda)}$, $\bar{V}^{(\lambda)}$, $\bar{f}^{(\lambda)}$ les éléments obtenus de U, V, f par la réduction modulo $\mathfrak{p}_\lambda$, où $\mathfrak{p}_\lambda$ est l'idéal correspondant à v_λ; alors, pour presque tout λ, l'ensemble des points (η_λ) tels que $\bar{f}^{(\lambda)^{-1}}(\eta_\lambda)$ soit de codimension $\leqq e$ dans $\bar{U}^{(\lambda)}$, résulte-il de l'ensemble A_e par la réduction modulo $\mathfrak{p}_\lambda$?

Nous allons étudier sur cette question dont le résultat affirmatif sera utilisé dans la théorie des groupes algébriques.

2. Soient k un corps muni d'une valuation discrète et $\mathfrak{o}$ son anneau de valuation. Désignons par $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}$ et par κ le corps des restes $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$. Nous fixons le corps k et l'anneau de valuation $\mathfrak{o}$. Soient Ω, Ω_κ les corps universels sur k, κ, respectivement une fois pour toutes. Par ensemble algébrique ou variété, on entend dans ce travail un ensemble algébrique affine ou variété affine dans Ω^n ou Ω_κ^n.

Etant donné un ensemble algébrique U défini sur k, on peut définir l'ensemble algébrique $\bar{U}$ défini sur κ, obtenu de U par la réduction modulo $\mathfrak{p}$, au sens de G. Shimura [2]. Dans ce qui suit, on comprend la spécialisation, notée $(x)\overset{\mathfrak{o}}{\rightarrow}(\xi)$, ou la réduction toujours au sens ci-dessus. Et nous désignons souvent par $\bar{E}$, $(\bar{x})$, $\bar{\mathfrak{A}}$ etc., les éléments obtenus par la réduction modulo $\mathfrak{p}$ d'un ensemble E, d'un point (x), d'un idéal $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{o}[X]$ etc. Pour éviter la confusion, l'adhérence d'une partie E d'un ensemble algébrique U sera notée par $\tilde{E}$. D'après le théorème des zéros, on obtient immédiatement le lemme suivant:

Lemme 1. Soit E une partie d'un ensemble algébrique U défini sur k, qui est une réunion d'un nombre fini de ses parties irréductibles $E_1,\cdots,E_h$ de U. Alors, on a $\bar{E}=\bar{\tilde{E}}$.

Pour un ensemble algébrique U, on sait que la $\mathfrak{o}$-algèbre affine de U, c'est-à-dire, l'anneau des fonctions polynômes sur U à coefficients dans $\mathfrak{o}$ est homomorphe sur la κ-algèbre affine de $\overline{U}$ et que cet homomorphisme φ est une prolongation de l'homomorphisme φ_0 de $\mathfrak{o}$ sur κ. Pour les variétés U, $\overline{U}$, cet homomorphisme peut être prolongé en une place φ' de $k(U)$ dans $\{\kappa(\overline{U}), \infty\}$. Si une fonction rationnelle $\overline{u}$ de $\kappa(\overline{U})$ est définie en un point (ξ) dans $\overline{U}$, alors toutes les fonctions rationnelles u telles que $\varphi'(u)=\overline{u}$ sont définies en tous les points (x) dans U tels que $(x)\overset{\mathfrak{o}}{\rightarrow}(\xi)$.

Soient U, V des variétés algébriques définies sur k et f une application rationnelle de U dans V définie sur k. Pour la simplicité, on suppose dorénavant dans ce travail que $\overline{U}$, $\overline{V}$ soient aussi les variétés algébriques définies sur κ et que f soit partout définie sur U. Soient P, Q, $\overline{P}$, $\overline{Q}$ les algèbres affines de U, V, $\overline{U}$, $\overline{V}$, respectivement. Pour un point $(x, f(x))$ dans le graphe Γ de f, considérons une spécialisation $(x, f(x))\overset{\mathfrak{o}}{\rightarrow}(\xi, \eta)$. Comme $(x, f(x))\overset{\mathfrak{o}}{\rightarrow}(\xi, \eta)$ entraîne toujours $(x)\overset{\mathfrak{o}}{\rightarrow}(\xi)$, $(f(x))\overset{\mathfrak{o}}{\rightarrow}(\eta)$, on a $(\xi)\in\overline{U}$, $(\eta)\in\overline{V}$. Désignons par $\mathfrak{D}$ l'ensemble des points (ξ) dans $\overline{U}$ tels que $(x, f(x))\overset{\mathfrak{o}}{\rightarrow}(\xi, \eta)$ pour tout point $(x, f(x))$ de Γ. Pour un point (ξ) dans $\mathfrak{D}$, supposons qu'il existe deux points (η), (η') dans $\overline{V}$ tels que $(x, f(x))\overset{\mathfrak{o}}{\rightarrow}(\xi, \eta)$, $(x', f(x'))\overset{\mathfrak{o}}{\rightarrow}(\xi, \eta')$. A tout élément $\overline{v}$ de $\overline{Q}$, correspond au moins un élément v de Q, et à v correspond par le cohomomorphisme de f un élément u de P tel que u est une fonction prolongée par $v\circ f$. En conséquence, les relations $u(x)=v(f(x))$, $u(x')=v(f(x'))$ donnent $\overline{u}(\xi)=\overline{v}(\eta)$, $\overline{u}(\xi)=\overline{v}(\eta')$. Comme on a $\overline{v}(\eta)=\overline{v}(\eta')$ pour tout $\overline{v}\in\overline{Q}$, on a nécessairement $(\eta)=(\eta')$. Donc, à tout point (ξ) de $\mathfrak{D}$, on peut faire correspondre un seul point (η) dans $\overline{V}$ tel que $(x, f(x))\overset{\mathfrak{o}}{\rightarrow}(\xi, \eta)$. Lorsque l'on désigne par $\overline{f}$ cette correspondance: $\overline{f}(\xi)=(\eta)$, on peut vérifier facilement que $\overline{f}$ est une application rationnelle de $\overline{U}$ dans $\overline{V}$, définie sur κ, ayant le domaine de définition $\mathfrak{D}$. Cette application $\overline{f}$ est appelée *l'application rationnelle obtenue de f par la réduction modulo* $\mathfrak{p}$.

Remarque. Soient U, V, f et $\overline{f}$ comme en haut; soient ϕ, $\overline{\phi}$ les cohomomorphismes de f, $\overline{f}$ et φ_P, φ_Q les homomorphismes de P, Q sur $\overline{P}$, $\overline{Q}$ respectivement. Alors, on obtient facilement que $\varphi_P\circ\phi=\overline{\phi}\circ\varphi_Q$ et on peut appeler $\overline{\phi}$ le cohomomorphisme obtenu de ϕ par la réduction modulo $\mathfrak{p}$.

Lemme 2. Soient U, V deux variétés définies sur k et soit f une application rationnelle de U dans V, définie sur k. Pour une partie quelconque E de U telle que $\overline{E}$ est contenu dans le domaine de définition $\mathfrak{D}$ de $\overline{f}$, on a alors $\overline{f}(\overline{E})=\overline{f(E)}$.

Pour la démonstration, on utilise les propriétés de $\bar{f}$ et de la spécialisation prolongée.

Lemme 3. Soit E une partie d'un ensemble algébrique U défini sur k, qui est une réunion d'un nombre fini de ses parties irréductibles $E_1,\cdots,E_h$ de U. Alors, on a $dim_k E \geqq dim_\kappa \bar{E}$.

Par la définition de la dimension, il suffit de montrer le lemme dans le cas où E est une partie irréductible et fermée. Soit $\mathcal{E}$ une composante irréductible de $\bar{E}$ telle qu'on a $dim_\kappa \bar{E}=dim_\kappa \mathcal{E}$. On a alors une place φ' de $k(E)$ dans $\{\kappa(\mathcal{E}), \infty\}$. Soient $\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_d$ des éléments de $\kappa(\mathcal{E})$ algébriquement indépendants sur κ, et soient $u_1,\cdots,u_d$ leurs images réciproques par φ'. Supposons qu'on ait $A(u_1,\cdots,u_d)=O$, pour un polynôme A à coefficients dans $\mathfrak{o}$. Dans le cas où un au moins des coefficients de A n'appartient pas à $\mathfrak{p}$, par l'application φ' on a $\bar{A}(\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_d)=O$. Mais, dans le cas contraire, comme l'idéal maximal $\mathfrak{p}$ est principal: $\mathfrak{p}=p\mathfrak{o}$ (cf. [4], p. 31, Th. 5), on a un polynôme A' tel que $A=p^N A'$ pour un entier convenable N, et qu'un au moins de ses coefficients n'appartient pas à $\mathfrak{p}$. Ainsi, $A'(u_1,\cdots,u_d)=O$ implique $\bar{A}'(\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_d)=O$. Donc, en tout cas, le polynôme $\bar{A}$ ou $\bar{A}'$ donne une relation algébriquement dépendante sur κ parmi $\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_d$.

Lemme 4. Si E est une partie irréductible d'un ensemble algébrique U défini sur k, alors $\bar{E}$ est équidimensionnel et $dim_k E=dim_\kappa \bar{E}$.[1)]

D'après la définition de la dimension et le lemme 1, on peut supposer que E soit une sous-variété de U. Il s'agit de montrer que $dim_k E=dim_\kappa \mathcal{E}_i$ pour toute composante irréductible $\mathcal{E}_i$ de $\bar{E}$.

La démonstration peut être esquissée comme suivant: Soit $\mathcal{E}$ une composante irréductible arbitraire de $\bar{E}$ et soient P, $\bar{Q}$ les algèbres affines de E, $\mathcal{E}$. D'après le lemme de normalisation, il existe des éléments $\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_\delta$ dans $\bar{Q}$, algébriquement indépendants par rapport à κ, tels que $\bar{Q}$ est entier sur $\kappa[\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_\delta]$ et que δ est le degré de transcendance de $\bar{Q}$ sur κ. Posons successivement: $\varphi(u_i)=\bar{u}_i$, $1\leqq i\leqq\delta$, $P=\mathfrak{o}[u_1,\cdots,u_\delta;\ w_1,\cdots,w_r]$, $\varphi(w_i)=\bar{w}_i$, $1\leqq i\leqq r$, $(u)=(u_1,\cdots,u_\delta)$, $(w)=(w_1,\cdots,w_r)$, $(\bar{u})=(\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_\delta)$, $(\bar{w})=\bar{w}_1,\cdots,\bar{w}_r)$. C'est facile à voir que $\bar{Q}=\kappa[\bar{u},\bar{w}]$. Ainsi, on peut considérer la correspondance $(u,w)\to(\bar{u},\bar{w})$ comme une spécialisation finie sur $\mathfrak{o}$. On montre ensuite que $(\bar{w})$ est une *spécialisation isolée* de (w) sur $(u)\xrightarrow{\mathfrak{o}}(\bar{u})$, autrement dit que si on a $(u,w)\xrightarrow{\mathfrak{o}}(\bar{u},\omega)\xrightarrow{\kappa}(\bar{u},\bar{w})$ on a aussi $(\bar{u},\bar{w})\xrightarrow{\kappa}(\bar{u},\omega)$. Supposons qu'on a des homomorphismes $\sigma_1,\sigma_2:\mathfrak{o}[u,w]\xrightarrow{\sigma_1}\kappa[\bar{u},\omega]\xrightarrow{\sigma_2}\kappa[\bar{u},\bar{w}]$, avec les noyaux $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ de σ_1, σ_2. Supposons qu'on ait $\mathfrak{N}\supsetneqq\{O\}$. L'image réciproque $\mathfrak{Q}$ de $\mathfrak{N}$ par σ_1 contient strictement $\mathfrak{M}$. Soient $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{M}'$ les

1) Ce lemma correspond à la proposition 19 dans [2], p. 148.

images réciproques de $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{M}$ par l'homomorphisme de $\mathfrak{o}[X]$ sur $\mathfrak{o}[u, w]$. Alors on a $\mathfrak{Q}' \supsetneqq \mathfrak{M}' \supseteqq \mathfrak{P}(E)$ et $\mathfrak{P}(\mathcal{E}) = \overline{\mathfrak{Q}'} \supsetneqq \overline{\mathfrak{M}'} \supseteqq \mathfrak{P}(\overline{E})$. De ces faits, on déduit que $\mathfrak{P}(\mathcal{E}) \supsetneqq \overline{\mathfrak{M}'} \supseteqq \mathfrak{P}(\overline{E})$ et que $\overline{\mathfrak{M}'}$ est un idéal premier dans $\kappa[X]$. C'est contradictoire au fait que $\mathfrak{P}(\mathcal{E})$ est un idéal premier minimal qui contient $\mathfrak{P}(\overline{E})$.[2]

Les conditions que $(u, w) \xrightarrow{\mathfrak{o}} (\overline{u}, \overline{w})$ est une spécialisation finie et que $(w) \rightarrow (\overline{w})$ est isolée sur $(u) \xrightarrow{\mathfrak{o}} (\overline{u})$ donnent que $dim_{\kappa(\overline{u})}\kappa(\overline{u}, \overline{w}) \geqq dim_{k(u)}k(u, w)$, ([1], p. 65, Prop. 13; [2], p. 146, Th. 6). Comme on a $dim_{\kappa(\overline{u})}\kappa(\overline{u}, \overline{w}) = O$, on a donc $dim_{k(u)}k(u, w) = O$. Comme $(u) = (u_1, \cdots, u_\delta)$ sont algébriquement indépendants sur k, on a $dim_k k(u, w) = \delta = dim_\kappa \kappa(\overline{u}, \overline{w})$. Donc, on a montré que $dim_k E = dim_\kappa \mathcal{E}_i$ pour toutes les composantes irréductibles $\mathcal{E}_i$ de $\overline{E}$, et par suite que $dim_k E = dim_\kappa \overline{E}$.

Théorème 1. Soit E une partie d'un ensemble algébrique U défini sur k, qui est une réunion d'un nombre fini de ses parties irréductibles de U. Alors, on a $dim_k E = dim_\kappa \overline{E}$.

La démonstration repose sur le lemme 3 et le lemme 4.

3. Soient U, V deux variétés algébriques définies sur k et soit f une application rationelle de U dans V. On suppose toujours que $\overline{U}$, $\overline{V}$ soient des variétés définies sur κ et que f soit partout définie. Pour tout entier $e \geqq O$, désignons par A_e l'ensemble des points (y) de V tels que $f^{-1}(y)$ soit non vide et de codimension $\leqq e$ dans U, et par B_e l'ensemble des points (x) de U tels qu'il existe au moins une composante irréductible de $f^{-1}(f(x))$, qui contient (x) et qui est de codimension $\leqq e$ dans U. Alors, d'après une partie à la fin de la démonstration du théorème 2, [3], p. 106, on a le lemme suivant.

Lemme 5. On a $f(B_e) = A_e$ pour tout e.

Soit k un corps muni d'une famille infinie de valuations discrètes $\{v_\lambda\}$. Nous désignons par $\mathfrak{o}_\lambda$, $\mathfrak{p}_\lambda$, κ_λ l'anneau de valuation, l'idéal maximal, le corps des restes, pour chaque v_λ. Soient Ω, Ω_κ des corps universels sur k, κ_λ. Nous désignons par $\overline{U}^{(\lambda)}$, $\overline{V}^{(\lambda)}$, $\overline{f}^{(\lambda)}$ etc. les éléments correspondants obtenus de U, V, f etc. par la réduction modulo $\mathfrak{p}_\lambda$. Pour la simplicité, on suppose dorénavant que $\overline{f}^{(\lambda)}$ soit partout défini sur $\overline{U}^{(\lambda)}$. De plus, on suppose que la famille $\{v_\lambda\}$ suffit à la condition (I) posée par G. Shimura dans [2]: tout élément non nul de k est $\mathfrak{p}_\lambda$-unité pour presque tout λ.

Théorème 2. U, V, f sont toujours les mêmes. Soit $\mathfrak{A}_{\lambda e}$ l'ensemble des points (η_λ) de $\overline{V}^{(\lambda)}$ tels que $\overline{f}^{(\lambda)^{-1}}(\eta_\lambda)$ soit non vide et de codimension $\leqq e$ dans $\overline{U}^{(\lambda)}$, pour e un entier arbitraire. Alors l'ensemble $\mathfrak{A}_{\lambda e}$ s'identifie à lénsemble $\overline{A}_e^{(\lambda)}$ obtenu de A_e par la réduction modulo $\mathfrak{p}_\lambda$,

2) Pour un sous-ensemble M, $\mathfrak{P}(M)$ désigne l'idéal associé à M.

pour presque tout λ.

Montrons d'abord que $\mathfrak{A}_{\lambda e} \subseteqq \bar{A}_e^{(\lambda)}$ pour presque tout λ. Prenons un point arbitraire (η_λ) de $\mathfrak{A}_{\lambda e}$. Il existe alors une composante irréductible $\mathfrak{C}_\lambda$ de $\bar{f}^{(\lambda)^{-1}}(\eta_\lambda)$ telle que $codim_{\kappa_\lambda}\mathfrak{C}_\lambda = codim_{\kappa_\lambda}\bar{f}^{(\lambda)^{-1}}(\eta_\lambda) \leqq e$. Soit (ξ_λ) un point générique de $\mathfrak{C}_\lambda$ sur $\kappa_\lambda : dim_{\kappa_\lambda}(\xi_\lambda) = dim_{\kappa_\lambda}\mathfrak{C}_\lambda$. Comme (ξ_λ) appartient à $\bar{f}^{(\lambda)^{-1}}(\eta_\lambda)$, on a $\bar{f}^{(\lambda)}(\xi_\lambda) = (\eta_\lambda)$. Alors, il existe un point (x_λ) dans U tel que $(x_\lambda, f(x_\lambda)) \xrightarrow{\mathfrak{o}_\lambda} (\xi_\lambda, \bar{f}^{(\lambda)}(\xi_\lambda))$. Quand on pose $f(x_\lambda) = (y_\lambda)$, il existe une composante irréductible C_λ de $f^{-1}(y_\lambda)$ contenant (x_λ). La spécialisation $(x_\lambda, f(x_\lambda)) \xrightarrow{\mathfrak{o}_\lambda} (\xi_\lambda, \bar{f}^{(\lambda)}(\xi_\lambda))$ entraîne $(x_\lambda) \xrightarrow{\mathfrak{o}_\lambda} (\xi_\lambda)$ et en conséquence $dim_k(x_\lambda) \geqq dim_{\kappa_\lambda}(\xi_\lambda)$, d'après le lemme 3. Comme on a $f^{-1}(y_\lambda) \supseteqq C_\lambda \ni (x_\lambda)$, on a $dim_k f^{-1}(y_\lambda) \geqq dim_k C_\lambda \geqq dim_k(x_\lambda) \geqq dim_{\kappa_\lambda}(\xi_\lambda) = dim_{\kappa_\lambda}\mathfrak{C}_\lambda = dim_{\kappa_\lambda}\bar{f}^{(\lambda)^{-1}}(\eta_\lambda)$. D'autre part, d'après le théorème 1, on a $dim_k U = dim_{\kappa_\lambda}\bar{U}^{(\lambda)}$ pour presque tout λ. En conséquence, on a $codim_k f^{-1}(y_\lambda) = dim_k U - dim_k f^{-1}(y_\lambda) \leqq dim_{\kappa_\lambda}\bar{U}^{(\lambda)} - dim_{\kappa_\lambda}\bar{f}^{(\lambda)^{-1}}(\eta_\lambda) = codim_{\kappa_\lambda}\bar{f}^{(\lambda)^{-1}}(\eta_\lambda) \leqq e$. On a $f^{-1}(y_\lambda) \ni (x_\lambda)$ et donc on a $(y_\lambda) \in A_e$. Comme on a $(y_\lambda) \xrightarrow{\mathfrak{o}_\lambda} (\eta_\lambda)$ on a $(\eta_\lambda) \in \bar{A}_e^{(\lambda)}$ et par suite $\mathfrak{A}_{\lambda e} \subseteqq \bar{A}_e^{(\lambda)}$ pour presque tout λ.

Montrons ensuite que $\bar{A}_e^{(\lambda)} \subseteqq \mathfrak{A}_{\lambda e}$ pour presque tout λ. Il s'agit de montrer que $\bar{B}_e^{(\lambda)} \subseteqq \mathfrak{B}_{\lambda e}$ pour presque tout λ, où $\mathfrak{B}_{\lambda e}$ est l'ensemble des points (ξ_λ) de $\bar{U}^{(\lambda)}$ tels qu'il existe au moins une composante irréductible de $\bar{f}^{(\lambda)^{-1}}\{\bar{f}^{(\lambda)}(\xi_\lambda)\}$, qui contient (ξ_λ) et qui est de codimension $\leqq e$ dans $\bar{U}^{(\lambda)}$. Si l'on a $\bar{B}_e^{(\lambda)} \subseteqq \mathfrak{B}_{\lambda e}$, d'après le lemme 2 et le lemme 5, on a $\bar{A}_e^{(\lambda)} = \overline{f(B_e)}^{(\lambda)} = \bar{f}^{(\lambda)}(\bar{B}_e^{(\lambda)}) \subseteqq \bar{f}^{(\lambda)}(\mathfrak{B}_{\lambda e}) = \mathfrak{A}_{\lambda e}$, pour presque tout λ.

Prenons un élément arbitraire (ζ_λ) de $\bar{B}_e^{(\lambda)}$. Il existe alors un élément (z_λ) dans B_e tel que $(z_\lambda) \xrightarrow{\mathfrak{o}_\lambda} (\zeta_\lambda)$, et (z_λ) appartient à une au moins des composantes irréductibles de $f^{-1}(f(z_\lambda))$, soit C_λ, qui est de codimension $\leqq e$ dans U. Soit $\mathfrak{C}_\lambda$ une composante irréductible de $\bar{C}_\lambda^{(\lambda)}$ qui contient (ζ_λ). Pour tout élément $(\xi_\lambda, \xi'_\lambda)$ de $\mathfrak{C}_\lambda \times \mathfrak{C}_\lambda$, comme on a $\mathfrak{C}_\lambda \times \mathfrak{C}_\lambda \subseteqq \bar{C}_\lambda^{(\lambda)} \times \bar{C}_\lambda^{(\lambda)} = \overline{C_\lambda \times C_\lambda}^{(\lambda)} \subseteqq \overline{f(z_\lambda)) \times f^{-1}(f^{-1}(f(z_\lambda))}^{(\lambda)}$, il existe un élément (x_λ, x'_λ) dans $C_\lambda \times C_\lambda$ tel que $(x_\lambda, x'_\lambda) \xrightarrow{\mathfrak{o}_\lambda} (\xi_\lambda, \xi'_\lambda)$ et que $f(x_\lambda) = f(z_\lambda)$, $f(x'_\lambda) = f(z_\lambda)$. Comme $\mathfrak{C}_\lambda$ est irréductible, $\bar{f}^{(\lambda)}(\mathfrak{C}_\lambda)$ l'est aussi. Pour tout élément $\bar{v}^{(\lambda)}$ de l'algèbre affine de $\bar{f}^{(\lambda)}(\mathfrak{C}_\lambda)$, il existe des éléments correspondants $\bar{u}^{(\lambda)}, v, u$ dans les algèbres affines de $\mathfrak{C}_\lambda, f(C_\lambda), C_\lambda$, comme on a écrit dans la définition de $\bar{f}^{(\lambda)}$. Par les spécialisations $(x_\lambda, f(x_\lambda)) \xrightarrow{\mathfrak{o}_\lambda} (\xi_\lambda, \bar{f}^{(\lambda)}(\xi_\lambda))$, $(x'_\lambda, f(x'_\lambda)) \xrightarrow{\mathfrak{o}_\lambda} (\xi'_\lambda, \bar{f}^{(\lambda)}(\xi'_\lambda))$, les relations $u(x_\lambda) = v(f(x_\lambda))$, $u(x'_\lambda) = v(f(x'_\lambda))$ entraînent les relations $\bar{u}^{(\lambda)}(\xi_\lambda) = \bar{v}^{(\lambda)}(\bar{f}^{(\lambda)}(\xi_\lambda))$, $\bar{u}^{(\lambda)}(\xi'_\lambda) = \bar{v}^{(\lambda)}(\bar{f}^{(\lambda)}(\xi'_\lambda))$. D'autre part, comme on a $f(x_\lambda) = f(x'_\lambda)$, on a $u(x_\lambda) = u(x'_\lambda)$, ce qui entraîne $\bar{u}^{(\lambda)}(\xi_\lambda) = \bar{u}^{(\lambda)}(\xi'_\lambda)$ par la spécialisation $(x_\lambda, x'_\lambda) \xrightarrow{\mathfrak{o}_\lambda} (\xi_\lambda, \xi'_\lambda)$, On a donc $\bar{v}^{(\lambda)}(\bar{f}^{(\lambda)}(\xi_\lambda))=\bar{v}^{(\lambda)}(\bar{f}^{(\lambda)}(\xi'_\lambda))$ pour tout élément $\bar{v}^{(\lambda)}$ de l'algèbre affine de $\bar{f}^{(\lambda)}(\mathfrak{C}_\lambda)$, et on a $\bar{f}^{(\lambda)}(\xi_\lambda)=\bar{f}^{(\lambda)}(\xi'_\lambda)$. Il en résulte que pour tout élément (ξ_λ) dans $\mathfrak{C}_\lambda$, on a $\bar{f}^{(\lambda)}(\xi_\lambda)=\bar{f}^{(\lambda)}(\zeta_\lambda)$, c'est-à-dire qu'on a $\mathfrak{C}_\lambda \subseteqq \bar{f}^{(\lambda)^{-1}}(\bar{f}^{(\lambda)}(\zeta_\lambda))$. Alors, il existe une composante irréductible $\mathfrak{D}_\lambda$ de $\bar{f}^{(\lambda)^{-1}}(\bar{f}^{(\lambda)}(\zeta_\lambda))$ qui contient $\mathfrak{C}_\lambda$, ce dernier contient (ζ_λ). D'après le lemme 4, on a $dim_k C_\lambda = dim_{\kappa_\lambda} \bar{C}_\lambda^{(\lambda)} = dim_{\kappa_\lambda} \mathfrak{C}_\lambda \leqq dim_{\kappa_\lambda} \mathfrak{D}_\lambda$ et $dim_k U = dim_{\kappa_\lambda} \bar{U}^{(\lambda)}$. En conséquence, on a $codim_{\kappa_\lambda} \mathfrak{D}_\lambda = dim_{\kappa_\lambda} \bar{U}^{(\lambda)} - dim_{\kappa_\lambda} \mathfrak{D}_\lambda \leqq dim_k U - dim_k C_\lambda = codim_k C_\lambda \leqq e$. Comme on a $(\zeta_\lambda) \in \mathfrak{D}_\lambda \subseteqq \bar{f}^{(\lambda)^{-1}}(\bar{f}^{(\lambda)}(\zeta_\lambda))$, on a $(\zeta_\lambda) \in \mathfrak{B}_{\lambda e}$ et donc on a $\bar{B}_e^{(\lambda)} \subseteqq \mathfrak{B}_{\lambda e}$ pour presque tout λ.

Références

[1] A. Weil: Foundations of Algebraic Geometry, New York (1946).
[2] G. Shimura: Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field, Amer. J. Math., **77**(1), 134–176 (1955).
[3] C. Chevalley: Fondements de la Géométrie Algébrique, Paris (1958).
[4] P. Samuel: Commutative Algebra, Cornell (1953).