161. Existence des Solutions de Classe Supérieure dans les Équations Différentielles Faiblement Hyperboliques à Coefficients Variables

Par Yujiro OHYA
Université de Kyoto

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 12, 1962)

1. *Introduction.* Proposons-nous dans cette note d'étudier l'existence des solutions de classe $\alpha\left(1<\alpha<\frac{m}{m-1}\right)$ du problème de Cauchy pour des équations aux dérivées partielles (linéaires) hyperboliques avec caractéristiques multiples à coefficients variables (qui sont de fonctions de classe α). D'abord, nous préciserons le mot "faiblement hyperbolique". Pour fixer les idées, considérons l'équation aux dérivées partielles d'order m:

(1.1) $$[p+q]\left(x, t; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x, t)=f(x, t) \quad x\in R^n, t\in R^1$$

où $p\left(x, t; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ est un polynôme de dérivation homogène d'ordre m en $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ à coefficients variables

$q\left(x, t; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ est aussi, mais l'ordre $\leq m-1$

alors on la dit hyperbolique par rapport à t comme d'habitude, si l'équation caractéristique

(1.2) $p(x, t; \xi, \lambda)=0$ a des racines réelles $\lambda_i(x, t; \xi)$ $(i=1, 2, \cdots m)$ (x, t) parcourant un domaine de $R^n\times R^1$, $\xi\in\Xi^n$.

Ici, il nous arrive deux-cas, c'est-à-dire, toutes les $\lambda_i(x, t; \xi)$ sont distinctes, et contraires. Appelerons-nous celui-là fortement (ou régulièrement) hyperbolique et celui-ci faiblement.

Jusqu'à maintenant, le problème de Cauchy pour le dernier reste ouvert, sans aucune restriction de $q\left(x, t; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ dans (1.1) ([4]: [9]). Mais, M. L. Hörmander a montré dans sa leçon [3] l'existence des solutions de classe α pour les équations différentielles faiblement hyperboliques à coefficients constants, en utilisant la solution élémentaire de $[p+q]\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$.*) On va l'étendre au cas des coefficients

*) Aussi, M. M. Matsumura l'a montré par la méthode différente qui n'est pas publiée.

variables, par la méthode d'énergie qui a été inspiré par [6] [7].

THEOREME. *Si, quelque soit q, p est faiblement hyperbolique (avec la multiplicité uniforme des racines caractéristiques), et ses coefficients sont des fonctions de classe* α, *alors une seule solution du problème de Cauchy pour* (1.1) *existe et elle appartient aussi à la même classe.*

Supposons-nous dans (1.3) $p(x, t; i\xi, \lambda)=\prod_{j=1}^{k}(\lambda-i\lambda_j(x, t; \xi))^{\nu_j}$ $\sum_1^k \nu_j=m$ uniformément pour $(x, t)\in(D\times[0, T])$ alors, si l'on considère l'opérateur d'intégrale singulière associé à p

(1.4) $$L\equiv\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}-iH\Lambda\right)^{\nu_j}$$ et si l'on pose $L-p\equiv C$,

C est un opérateur d'intégrale singulière d'ordre $\leq m-1$, c'est-à-dire $||Cu||_{L_x^2}\leq\text{const.}\sum_{i+|\nu|\leq m-1}||D_t^i D_x^\nu u||_{L_x^2}$ pour toute $u\in(D_{L^2})$, d'où de plus si l'on pose $C-q\equiv M$, on peut affirmer que M est un opérateur de dérivation d'ordre $\leq m-1$ quelconque. Donc (1.1) devient

(1.5) $$L[u]=f+M[u] \qquad M=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l\leq k}a_l^k(x, t)D_x^l D_t^{k-|l|}.$$

Construisons cette solution de la manière suivante:

(1.6) $$u(x, t)=\sum_{N=0}^{\infty}u_N(x, t)$$ $u_N(x, t)$ étant déterminée comme il suit:

(1.7) $$L[u_0]=f \qquad L[u_N]=M[u_{N-1}] \quad N=1, 2, \cdots$$
: avec les données initiales 0.

Donc, pour prouver notre THEOREME ci-dessus, il nous suffit de motrer que chaque $u_N(x, t)$ soit de fonction de classe α et la série (1.6) soit uniformément convergente. Alors le problème de Cauchy pour (1.1) a au moins une solution de classe α, mais il nous conduit à constater avec M. L. Schwartz [8], qu'elle est une seule.

Je tiens à exprimer ma vive gratitude à M. M. S. Mizohata et M. Yamaguti pour leur suggestions et leur conseils.

2. *Quelques Lemmes.* Commençons-nous à énoncer quatre lemmes suivants sans preuve.

Lemme 2.1 (*Analogue au théorème de la fonction implicite*)

Si l'on suppose que les coefficients de (1.1) *est de fonctions de classe* α, *alors* H_j *est un opérateur d'intégrale singulière de classe* α *et* $a_l^k(x, t)$ *de* (1.5) *est aussi de classe* α.

Lemme 2.2 (*voir Hadamard* [2])

(2.1) $$\frac{1}{(4\pi)^\alpha}\sum_{q=0}^{p}C_q^p\left[\Gamma\left(p-q-\frac{1}{2}\right)\right]^\alpha\left[\Gamma\left(q-\frac{1}{2}\right)\right]^\alpha\leq\frac{4^\alpha}{(4\pi)^{\alpha/2}}\left[\Gamma\left(p-\frac{1}{2}\right)\right]^\alpha$$

où p est un nombre entier positif et on définit

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\pi}.$$

Lemme 2.3 (*Lemme de Sovolev*)

Il existe une constante positive $c(n)$ *dépandant seulement de* *dimension l'espace tel que*

$$\sup_x |u(x)| \leqq c(n)\cdot\Big(\sum_{|\nu|\leq[n/2]+1} \|D^\nu u(x)\|\Big). \tag{2.2}$$

D'où il découle immédiatement qu'il nous suffit d'évaluer la solution au sens de L^2.

Lemme 2.4 (*Inégalité d'énergie*)

La solution de

$$\Big(\frac{d}{dt}-iH\Lambda\Big)w(x,t)=f(x,t) \tag{2.3}$$

satisfait à l'inégalité suivante

$$\|w(x,t)\|'_t \leq \gamma_0 \|w(x,t)\| + \|f(x,t)\| \tag{2.4}$$

où γ_0*: une constante telle que*

$$\|(iH)\Lambda-\Lambda(iH^*)\|_{\mathfrak{L}(L^2,L^2)} \leq \gamma_0$$

3. *Evaluation de* $D_t^q D_x^p w(x,t)$.

Proposition 3.1 *Si l'on suppose dans* (2.3)

$$\|D^x_{\nu,t}[iH]\|_{\mathfrak{L}(L^2,L^2)} \leq \frac{[\Gamma(|\nu|-1-\frac{1}{2})]^\alpha}{\rho^{\alpha(|\nu|-1)}}\cdot K$$

$$\|D^\nu_{x,t}f(x,t)\| \leq \frac{[\Gamma(|\nu|-\frac{1}{2})]^\alpha}{\rho^{\alpha|\nu|}} \exp[\gamma_0 t]\cdot K(t)^{|\nu|}\cdot K$$

où $K(t)=(1+\gamma_1 t)\exp[\gamma_1 t]$, $\gamma_1=nK$

alors la solution de (2.3) *satisfait à l'inégalité*

$$\|D^\nu_{x,t}w(x,t)\| \leq \exp[(\gamma_0+|\nu|\gamma_1)t]\,\|D^\nu_{x,t}w(x,0)\| + \frac{[\Gamma(|\nu|-\frac{1}{2})]^\alpha}{\rho^{\alpha|\nu|}}\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|\nu|+1}t(4)^\alpha K. \tag{3.1}$$

Preuve. De (2.3) on a (R_j étant un opérateur de Riesz [1])

$$\Big(\frac{d}{dt}-iH\Lambda\Big)D^\nu_{x,t}w(x,t)-C^\nu_{\nu-1}D_{x,t}[iH]\sum_{j=1}^n R_jD_jD^{\nu-1}_{x,t}w(x,t)$$

$$=D^\nu_{x,t}f(x,t)+\sum_{\mu\leq\nu-2}C^\nu_\mu D^{\nu-\mu}_{x,t}[iH]\sum_{j=1}^n R_jD_jD^\mu_{x,t}w(x,t).$$

Compte tenu du lemme 2.4, on a

$$\|D^\nu_{x,t}w(x,t)\|'_t \leq \gamma_0\|D^\nu_{x,t}w(x,t)\| + \|D^\nu_{x,t}f(x,t)$$

$$+\sum_{\mu\leq\nu-2}C^\nu_\mu D^{\nu-\mu}_{x,t}[iH]\sum_{j=1}^n R_jD_jD^\mu_{x,t}w(x,t)\|$$

en posant $\displaystyle\varphi_\nu(t)\equiv\sum_{i=1}^n\|D_iD^{\nu-1}_{x,t}w(x,t)\|$

$$\psi_\nu(t)\equiv\sum_{i=1}^n\|D_iD^{\nu-1}_{x,t}f(x,t)\|$$

on a $\varphi_\nu(t)\leq\exp[(\gamma_0+|\nu|\gamma_1)t]\varphi_\nu(0)$

$$+\int_0^t \exp[(\gamma_0+|\nu|\gamma_1)(t-\tau)]\Big(\psi_\nu(\tau)$$

$$+\sum_{\mu\leq\nu-2}C^\nu_\mu\gamma_1\frac{[\Gamma(|\nu|-|\mu|-1-\frac{1}{2})]^\alpha}{\rho^{\alpha(|\nu|-|\mu|-1)}}\varphi_{\mu+1}(\tau)\Big)d\tau$$

donc, en utilisant le lemme 2.2, récurrence en ν nous conduit à (3.1).

c.q.f.d.)

Proposition 3.2 *Sous les hypothèses de prop.* 3.1 *et* $w(x,0)=0$, *on a*

$$(3.2)\qquad \|D_t^q D_x^p w(x,0)\| \leq (2\gamma_1)^q \frac{[\Gamma(|p|+q-\frac{1}{2})]^\alpha}{\rho^{\alpha(|p|+q-1)}}(4)^\alpha K.$$

Preuve. En $\frac{d}{dt}w=f+iH\Lambda w$, si l'on applique la formule de Leibniz il est facile à vérifier.

En résumé, on a obtenu pour la solution de (2.3) avec la donnée zéro,

$$\|D_t^q D_x^p w(x,t)\| \leq \Big[\frac{[(|p|+q-1-\frac{1}{2})]^\alpha}{\rho^{\alpha(|p|+q-1)}} + \frac{[\Gamma(|p|+q-\frac{1}{2})]^\alpha}{\rho^{\alpha(|p|+q)}} tK(t)\Big] \exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|+q}K[(2\gamma_1]^q(4)^\alpha].$$

Ici, si l'on revient le beau travail de Mizohata [5] qui nous permet de resoudre (1.7) successivement, on a la majoration

$$\|D_t^q D_x^p u_0(x,0)\| \leq \Big[\sum_{j=0}^{m} \frac{[tK(t)]^j}{j!} \frac{[\Gamma(j+|p|+q-m-\frac{1}{2})]^\alpha}{\rho^{\alpha(j+|p|+q-m)}}\Big] \times \exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|+q}[(2\gamma_1)^q(4)^\alpha]^m K.$$

Ensuite, par presque le même procédé, il entraîne l'inégalité suivante

$$\|D_t^q D_x^p M[u_0(x,t)]\| \leq \Big[\sum_{j=0}^{m} \frac{[tK(t)]^j}{j!} \frac{[\Gamma(j+|p|+q-1-\frac{1}{2})]^\alpha}{\rho^{\alpha(j+|p|+q-1)}}\Big]\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|+q} \times [(2\gamma_1]^q(4)^\alpha]^m K\Big[\frac{m(m+1)}{2}(4)^\alpha K\Big]$$

où l'on a supposé

$$\|D_{x,t}^\nu a_i^k(x,t)\|_{\mathfrak{L}(L^2,L^2)} \leq \frac{[\Gamma(|\nu|-\frac{1}{2})]^\alpha}{\rho^{\alpha|\nu|}}K.$$

N-fois répétition nous donne la

Proposition 3.3 *Pour*

$$L[u_N]=\begin{cases} f & (N=0) \\ M[u_{N-1}] & (N=1,2,\cdots) \end{cases}\ \textit{données}\ D_t^i u_N(x,0)=0 \quad 0\leq i\leq m-1$$

on a

$$\|D_t^q D_x^p u_N(x,t)\| \leq \Big[\sum_{j=0}^{(N+1)m} \frac{[tK(t)]^j}{j!} \times \frac{[\Gamma(j+|p|+q-m-N-\frac{1}{2})]^\alpha}{\rho^{\alpha(j+|p|+q-m-N)}}\Big] \exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|+q} \times [(2\gamma_1)^q(4)^\alpha]^{(N+1)m}\Big[\frac{m(m+1)}{2}(4)^\alpha K\Big]^N K.$$

Donc, à fortiori

$$\|D_t^q D_x^p u_N(x,t)\| \leq [(N+1)m+1] \times \frac{[tK(t)]^{(N+1)m}}{[(N+1)m]!} \frac{[\Gamma(|p|+q+N(m-1)-\frac{1}{2})]^\alpha}{\rho^{\alpha(|p|+q+N(m-1))}} \exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|+q} \times [(2\gamma_1)^q(4)^\alpha]^{(N+1)m}\Big[\frac{m(m+1)}{2}(4)^\alpha K\Big]^N K.$$

En appliquant la formule de Stirling à $\Gamma(s)$ et remarquant $1<\alpha<\frac{m}{m-1}$, on vérifie facilement que la suite de majoration de $D_t^q D_x^p u_N(x, t)$ est justement convergente (uniformément).

Références

[1] A. P. Calderón et A. Zygmund: Singular integral operators and differential equations, Amer. Jour. Math., **79** (1957).

[2] J. Hadamard: Les fonctions de classe supérieure dans l'équation de Volterra, Jour. d'Anal. Math., **1** (1951).

[3] L. Hörmander: Lectures on linear partial differential operators.

[4] A. Lax: On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics, Comm. Pure. Appl. Math., **9** (1956).

[5] S. Mizohata: Systèmes hyperboliques, Jour. Math. Soc. Japan, **11**(3) (1959).

[6] ——: Analyticity of solution of hyperbolic systems with analytic coefficients, Comm. Pure. Appl. Math., **14**(3) (1961).

[7] ——: Solutions mulles et solutions non analytiques, Jour. Math. Kyoto Univ., **1**(1) (1962).

[8] L. Schwartz: Les équations d'évolutions liées au produit de composition, Ann. L'Inst. Fourier (1950).

[9] M. Yamaguti: Le problème de Cauchy et les opérateurs d'intégrale singulière, Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto., Series A, **32**(1) (1959).