90. *Représentations unitaires du groupe des déplacements du plan $\mathfrak{p}$-adique*

Par Masahiko SAITO
Institut de Mathématiques, Université de Tokyo
(Comm. by Zyoiti SUETUNA, M.J.A., Sept. 12, 1963)

1. Le but de cette note est une extension au cas $\mathfrak{p}$-adique des résultats de Vilenkin sur les représentations du groupe des déplacements euclidiens [1]. En calculant explicitement les coefficients matriciels des représentations unitaires irréductibles à l'aide d'une base naturelle, on est conduit à une certaine classe de fonctions que l'on pourrait appeler les fonctions de Bessel $\mathfrak{p}$-adiques. En particulier les fonctions sphériques zonales s'expriment par les fonctions de Bessel $\mathfrak{p}$-adiques d'indice 0, qui essentiellement n'est autre qu'une somme de Gauss du corps des restes.

L'exposé détaillé avec démonstrations paraîtra ultérieurement.

2. Soient $\mathfrak{k}$ le complété d'un corps de nombres algébriques par rapport à une valuation discrète, $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $\mathfrak{o}$ et t un élément premier de $\mathfrak{p}$. Si τ est une racine carrée de t, $\mathfrak{k}(\tau)$ est une des deux extensions quadratiques ramifiées de $\mathfrak{k}$. Il existe encore une extension quadratique non-ramifiée, qu'on ne traite pas ici. Nous supposerons $p-1>2e$, p et e étant respectivement le caractéristique du corps ses restes $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ et l'indice de ramification de $\mathfrak{p}$ au-dessus de p.

Introduisons deux fonctions trigonométriques $\mathfrak{p}$-adiques définies sur $\mathfrak{o}$ à valeurs dans $\mathfrak{o}$ par les séries convergents:

$$\mathfrak{c}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n x^{2n}}{(2n)!},\quad \mathfrak{s}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Les formules suivantes ont lieu:

$$\begin{aligned}&\exp \tau x=\mathfrak{c}(x)+\mathfrak{s}(x),\\ &\mathfrak{c}(x)^2-t\mathfrak{s}(x)^2=1,\\ &\mathfrak{c}(x+y)=\mathfrak{c}(x)\mathfrak{c}(y)+t\mathfrak{s}(x)\mathfrak{s}(y),\\ &\mathfrak{s}(x+y)=\mathfrak{c}(x)\mathfrak{s}(y)+\mathfrak{s}(x)\mathfrak{c}(y).\end{aligned}$$

Lemme. *Soient a et b deux éléments de $\mathfrak{k}$ satisfaisant à la relation $a^2-tb^2=1$. Alors a et b sont entiers et $a\equiv 1$* (mod $\mathfrak{p}$). *Si en particulier $a\equiv 1$* (mod $\mathfrak{p}$), *il existe un seul élément θ dans $\mathfrak{o}$ tel qu'on ait $a=\mathfrak{c}(\theta)$ et $b=\mathfrak{s}(\theta)$.*

Soit G le groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & \mathfrak{c}(\theta) & \mathfrak{s}(\theta)\\ 0 & t\mathfrak{s}(\theta) & \mathfrak{c}(\theta)\end{pmatrix}$$

où $x, y \in \mathfrak{k}$ et $\theta \in \mathfrak{o}$. G est d'indice 2 dans le produit semi-direct du group additif de $\mathfrak{k}(\tau)$ par le groupe multiplicatif des éléments de $\mathfrak{k}(\tau)$ à norme 1 et s'appellerait le groupe des déplacements du plan $\mathfrak{p}$-adique par analogie avec le cas euclidien.

3. Outre les représentations de dimension 1, il existe deux séries de représentations unitaires irréductibles paramétrées par $\mathfrak{k}$-{0}. Elles se réalisent dans l'espace hilbertien $L^2(\mathfrak{o})$ des fonctions définies dans $\mathfrak{o}$ et de carré intégrable par rapport à une mesure de Haar de $\mathfrak{o}$.

Pour x dans $\mathfrak{k}$, $\{x\}$ signifiera dans cette note la partie fractionnaire de la trace de x relative à $\mathfrak{k}$ et $\boldsymbol{Q}_p$. Alors la représentation U^a (resp. V^b) de la première (resp. deuxième) série à paramètre a (resp. b) est donnée par la formule

$$(U_g^a f)(\varphi)=\exp 2\pi i\{a[x\mathfrak{c}(\varphi+\theta)-ty\mathfrak{s}(\varphi+\theta)]\}\cdot f(\varphi+\theta)$$

respectivement

$$(V_g^b f)(\varphi)=\exp 2\pi i\{b[-x\mathfrak{s}(\varphi+\theta)+y\mathfrak{c}(\varphi+\theta)]\}\cdot f(\varphi+\theta),$$

$$\text{où } g=\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & \mathfrak{c}(\theta) & \mathfrak{s}(\theta)\\ 0 & t\mathfrak{s}(\theta) & \mathfrak{c}(\theta)\end{pmatrix},\ f\in L^2(\mathfrak{o}),\ \varphi\in\mathfrak{o}.$$

4. Prenons comme base orthonormale de $L^2(\mathfrak{o})$ les caractères unitaires e_z de $\mathfrak{o}$: $e_z(x)=\exp 2\pi i\{zx\}, x\in\mathfrak{o}$, où z parcourt $\mathfrak{k}$ modulo $\mathfrak{d}^{-1}$, $\mathfrak{d}$ étant la différente de $\mathfrak{k}$ par rapport à $\boldsymbol{Q}_p$.

Introduisons pour z dans $\mathfrak{k}$ modulo $\mathfrak{d}^{-1}$ deux fonctions définies sur $\mathfrak{k}$ à valeurs complexes:

$$J_z^1(x)=\int_{\mathfrak{o}}\exp 2\pi i\{x\mathfrak{c}(\varphi)-z\varphi\}d\varphi,$$

$$J_z^2(x)=\int_{\mathfrak{o}}\exp 2\pi i\{x\mathfrak{s}(\varphi)-z\varphi\}d\varphi,$$

où d désigne la mesure de Haar de $\mathfrak{o}$ normalisée telle que la masse totale soit égale à 1. On les appellerait la première et la deuxième fonctions de Bessel $\mathfrak{p}$-adique d'indice z.

Si $x^2-\mathrm{t}y^2$ est carré dans $\mathfrak{k}(x, y\in\mathfrak{k})$, il existe $r\in\mathfrak{k}$ et $\alpha\in\mathfrak{o}$ uniquement déterminés tels que $x=r\mathfrak{c}(\alpha)$, $y=r\mathfrak{s}(\alpha)$. Si x^2-ty^2 est non-carré, il existe $\mathfrak{s}\in\mathfrak{k}$ et $\beta\in\mathfrak{o}$ uniquement déterminés tels que $x=st\mathfrak{s}(\beta)$, $y=s\mathfrak{c}(\beta)$.

En tenant comte de ces conventions sur notations, on peut exprimer les coefficients matriciels de la représentation U^a(resp. V^b) par rapport à la base $\{e_z\}$ de $L^2(\mathfrak{o})$:

$$U^a_{z,z'}(g)=\int_{\mathfrak{o}}(U_g^a e_{z'})(\varphi)\overline{e_z(\varphi)}d\varphi$$

$$=\begin{cases}\exp 2\pi i\{(z'-z)\alpha+z\theta\}\cdot J^1_{z'-z}(ar) \text{ si } x^2-ty^2 \text{ est carré,}\\ \exp 2\pi i\{(z'-z)\beta+z\theta\}\cdot J^2_{z'-z}(ast) \text{ si } x^2-ty^2 \text{ est non-carré;}\end{cases}$$

$$V^b_{z,z'}(g)=\int_{\mathfrak{o}}(V_g^b e_{z'})(\varphi)\overline{e_z(\varphi)}d\varphi$$

$$=\begin{cases}\exp 2\pi i\{(z'-z)\alpha+z\theta\}\cdot J^2_{z'-z}(br) \text{ si } x^2-ty^2 \text{ est carré,}\\ \exp 2\pi i\{(z'-z)\beta+z\theta\}\cdot J^1_{z'-z}(bs) \text{ si } x^2-ty^2 \text{ est non-carré.}\end{cases}$$

La fonction sphérique zonale $f^{1,a}$(resp. $f^{2,b}$) associée à la représentation U^a(resp. V^b), définie sur $\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}$, est de la forme suivante:

$$f^{1,a}(x, y)=\begin{cases}J_0^1(ar) \text{ si } x^2-ty^2 \text{ est carré,}\\ J_0^2(ast) \text{ si } x^2-ty^2 \text{ est non-carré;}\end{cases}$$

respectivement

$$f^{2,b}(x, y)=\begin{cases}J_0^2(br) \text{ si } x^2-ty^2 \text{ est carré,}\\ J_0^1(bs) \text{ si } x^2-ty^2 \text{ est non-carré.}\end{cases}$$

5. Les fonctions de Bessel $\mathfrak{p}$-adiques d'indice 0 peuvent se calculer:

$$J_0^1(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x\in\mathfrak{d}^{-1}\\ q^{-m}\exp 2\pi i\{x\} \text{ si } v(x)=-d-2m-1,\ m\geqq 0,\\ q^{-m}\exp 2\pi i\{x\}\cdot G\left(q, \dfrac{u}{2}\right) \text{ si } v(x)=-d-2m,\ m>0;\end{cases}$$

$$J_0^2(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x\in\mathfrak{d}^{-1}\\ 0 \text{ si } x\notin\mathfrak{d}^{-1};\end{cases}$$

où q désigne le nombre d'éléments du corps des restes $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$, $v(x)$ l'ordre de x par rapport à $\mathfrak{p}$, $x=t^{v(x)}u$ et $\mathfrak{d}=\mathfrak{p}^d$. Et finalement $G(q, u/2)$ est une somme de Gauss du corps fini $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$:

$$G(q, u/2)=\sum_{\varphi\in\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}}\exp 2\pi i\left\{t^{-d-1}\frac{u}{2}\varphi^2\right\}.$$

Référence

[1] N. Ya. Vilenkin: Fonctions de Bessel et représentations du groupe des déplacements euclidiens (en russe), Uspehi Matematičeskih Nauk, **11**(69), 69–112 (1956).