56. *Sur les facteurs de convergence des séries de Walsh-Fourier*

Par Satoru IGARI
Université de Paris et Université du Tôhoku
(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., April 13, 1964)

1. Soit $\phi_0(x)$ une fonction de période 1, dont la valeur est égale à 1 pour $0\leqq x<1/2$, à -1 pour $1/2\leqq x<1$, et posons $\phi_n(x)=\phi_0(2^n x)$ pour $n=1,2,\cdots$. Alors le système des fonctions de Walsh $\{\psi_n(x)\}_{n=0,1,2,\cdots}$ est défini par

$$\psi_n(x)=\prod_i \phi_i^{\varepsilon_i}(x)$$

où $n=\sum\varepsilon_i 2^i$, $\varepsilon_i=0$ ou 1, est le développement dyadique de n.

Soit f une fonction sommable sur $(0,1)$. On en désigne le développement de Walsh-Fourier par

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\psi_n(x), \quad \text{où} \quad a_n=\int_0^1 f(x)\psi_n(x)dx,$$

et les sommes partielles de la série de Walsh-Fourier de f par

$$S_n(x;f)=\sum_{k=0}^{n}a_k\psi_k(x).$$

Le but de notre étude est de démontrer les théorèmes suivants, qui avaient été énoncés par R. E. A. C. Paley [2] dont le cas $p=2$ a été démontré par S. Yano [3], mais, à la connaissance de l'auteur, la démonstration du cas général n'est pas encore publiée.

Théorème 1. (i) *Soit* $f\in L^p(0,1)$, $1<p\leqq 2$, *alors*

$$S_n(x;f)=o\,\{(\log n)^{1/p}\}$$

presque partout, et

$$\int_0^1 \sup_{n\geqq 2}\frac{|S_n(x;f)|^p}{\log n}dx\leqq A_p\int_0^1|f(x)|^p dx,$$

où A_p *est une constante indépendante de* f *et* $A_p=O(p-1)^{-1}$.

(ii) *Soit* $f\in L\log^+L(0,1)$, *alors*

$$\int_0^1 \sup_{n\geqq 2}\frac{|S_n(x;f)|}{\log n}dx\leqq B\int_0^1|f(x)|\log^+|f(x)|dx+C$$

avec certaines constantes absolues B *et* C.

(iii) *Soit* $f\in L(0,1)$, *alors*

$$S_n(x;f)=o\,(\log n) \quad \textit{presque partout.}$$

Théorème 2. (i) *Soit* $f\in L^p(0,1)$, $1<p\leqq 2$ *et soit*

$$S_{p,n}(x;f)=\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{(\log k)^{1/p}}\psi_k(x)$$

alors

$$\int_0^1 \sup_{n\geqq 2} |S_{p,n}(x;f)|^p\,dx \leqq A_p \int_0^1 |f(x)|^p\,dx$$

où $A_p=O(p-1)^{-1}$ *est une constante indépendante de* f. *En particulier, pour presque tout* x, $(\log k)^{-1/p}$ *sont facteurs de convergence pour la série* $\sum a_k\psi_k(x)\in L^p$.

(ii) *Soit* $f\in L\log^+ L$, *alors*

$$\int_0^1 \sup_{n\geqq 2} |S_{1,n}(x;f)|\,dx \leqq B\int_0^1 |f(x)|\log^+|f(x)|\,dx + C$$

avec certaines constantes absolues B *et* C.

(iii) *Soit* $f(x)\sim\sum a_k\psi_k(x)\in L(0,1)$, *alors pour presque tout* x, $(\log k)^{-1}$ *sont facteurs de convergence pour* $\sum a_k\psi_k(x)$.

Plusieurs démonstrations des théorèmes analogues au cas trigonométrique sont connues. Notre méthode s'adapte aussi au cas trigonométrique, donc dans la suite on peut supposer que $S_n(x;f)$ représentent, soit les sommes partielles d'une série de Walsh-Fourier, soit celles d'une série de Fourier.

2. Nous donnons une esquisse de la démonstration. Pour commencer nous énonçons quelques lemmes.

Lemme 1. *Soit* $f\in L(0,1)$. *Si l'on définit* y_0 *par* $y_0=4\|f\|_1$, *alors pour tout* $y>y_0$ f *se décompose:* $f=v+w$, *où* (i) $w=\sum_{k=1}^{\infty} w_k$, (ii) $|v(x)|\leqq 2y$ *pour presque tout* x, (iii) $\|v\|_1=\|f\|_1$, (iv) $\sum\|w_k\|_1=2\|f\|_1$, (v) $\int_0^1 w_k\,dx=0$, $k=1,2,\cdots$, (vi) *il existe une suite d'intervalles disjoints* $\{I_k\}$ *tels que le support de* w_k *soit contenu dans* I_k *et* I_k *est de forme* (x_0, x_0+2^{-M}) *où* $x_0=2^{-n_1}+2^{-n_2}+\cdots+2^{-n_m}$, $n_1<n_2<\cdots<n_m\leqq M$, $M\geqq 2$ *et*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\leqq\frac{1}{y}\int_0^1|f(x)|\,dx.$$

La démonstration peut s'effectuer de la même manière que dans S. Igari [1; Lemme 1].

Lemme 2. *Soit* $n(x)$ *une fonction mesurable, de période* 1, *à valeurs entiers* $\geqq 2$, *choisie arbitrairement mais fixe. Soit* w *la fonction construite de* f *d'après Lemme* 1. *Si* $I_k=(x_0, x_0+2^{-M})$ *est un des intervalles définis dans Lemme* 1, *on pose* $I_k^*=(x_0-2^{-M}-2^{-M-1}, x_0+2^{-M}+2^{-M-1})$ *et le prolonge périodiquement, et soit* E^* *la réunion des* I_k^* *ainsi définis. Alors on a*

$$\int_{CE^*}\frac{|S_{n(x)}(x;w)|}{\log n(x)}\,dx\leqq A'\int_0^1|w(x)|\,dx$$

où $CE^*=[0,1)-E^*$ *et* A' *est une constante absolue.*

La démonstration peut se faire en modifiant celle du Lemme 2 dans S. Igari [1].

Du résultat déjà connu pour le cas $p=2$ et du Lemme 2, on déduit le

Lemme 3. *Si* $d\mu = dx/\log n(x)$, *où* $n(x)$ *est la fonction du Lemme* 2, *on a*

$$\mu(\{x;\ |S_{n(x)}(x;f)|>y\}) \leqq \frac{A''}{y}\int_0^1 |f(x)|\,dx,$$

pour tout $f \in L(0,1)$ *et pour tout* $y>0$, *où* A'' *est une constante absolue.*

Si l'on applique le théorème d'interpolation d'opérateur dû à J. Marcinkiewicz (v. p. ex. A. Zygmund [4; p. 112]) entre l'inégalité connue pour $p=2$ et le Lemme 3, on obtient le Théorème 1. On en peut déduire le Théorème 2.

Une démonstration détaillée sera donnée dans un autre périodique.

Références

[1] S. Igari: An extension of the interpolation theorem of Marcinkiewicz II. Tôhoku Math. J., **15**, 343–358 (1963).

[2] R. E. A. C. Paley: A remarkable series of orthogonal functions. Proc. London Math. Soc., **34**, 241–279 (1932).

[3] S. Yano: On Walsh Fourier series. Tôhoku Math. J., **3**, 223–242 (1951).

[4] A. Zygmund: Trigonometric series, vol. II. Cambridge (1959).