24. *Sur la Régularité au Bord des Solutions des Équations Paraboliques*

Par Yoshinori KAMETAKA

Université de Kyôto

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Feb. 12, 1965)

1. Introduction. L'hypoellipticité des opérateurs paraboliques est déjà connue. Nous allons montrer la régularité au bord des solutions d'une équation parabolique vérifiant certaines conditions aux limites:

$$(1.1)\quad \begin{cases} Lu=\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x)-\sum\limits_{|\nu|\le 2m} a_\nu(t,x)\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)^\nu u(t,x) \\ \quad =f(t,x),\ (t,x)\in U\cap G, \\ B_j u=\sum\limits_{|\nu|\le m_j} b_{j\nu}(t,x)\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)^\nu u(t,x)=g_j(t,x),\ (t,x)\in U\cap\partial G, \\ \quad (j=1,2,\cdots,m;\ m_j\le 2m-1), \end{cases}$$

où $(t, x)\in R^n$ et G est un domaine de R^n dont la frontière ∂G—supposée contenant l'orgine—est définie dans un voisinage U de l'origine par

$$\varphi(t,x)=0,\qquad \sum_j\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right|\neq 0,\qquad \text{pour } (t,x)\in U;\qquad \varphi(t,x)\in C^\infty(U).$$

Explicitons les conditions sur $\{L; B_j\}$:

1) $$\mathrm{Re}\sum_{|\nu|=2m} a_\nu(0,0)\xi^\nu\neq 0,\quad \xi\neq 0,$$

2) Soit $\eta(\in R^{n-1})$ la normale de l'hypersurface $\partial G\cap(t=0)$ à l'origine; Soit $\xi(\neq 0)$ un vecteur parallèle à l'hyperplan tangent de $\partial G\cap(t=0)$ à l'origine; Soit $\tau\in R^1$. Pour $(\xi,\tau)\neq(0,0)$ fixé arbitrairement, désignons $P(z)=i\tau-(-1)^m\sum\limits_{|\nu|=2m}a_\nu(0,0)(\xi+z\eta)^\nu$. Nous imposons la condition suivante: Il existe justement m racines $z_j(\xi,\tau)$ $(j=1,2,\cdots,m)$ de $P(z)=0$ ayant la partie imaginaire positive et m racines z_j $(j=m+1,\cdots,2m)$ dont la partie imaginaire soit négative. Posons $P_+(z)=\prod\limits_{j=1}^{m}(z-z_j)$, $P_-(z)=\prod\limits_{j=m+1}^{2m}(z-z_j)$. Alors $Q_j(z)=\sum\limits_{|\nu|=m_j}b_{j\nu}(0,0)(\xi+z\eta)^\nu$ $(j=1,2,\cdots,m)$ sont linéairement indépendants modulo $P_+(z)$ et en même temps modulo $P_-(z)$.

3) $$a_\nu(t,x)\in C(\overline{U\cap G}),\quad b_{j\nu}(t,x)\in C(U\cap\partial G).$$

Enonçons

Théorème 1. (*Hypoellipticité au bord*). Soit u une solution de (1.1) telle que $\dfrac{\partial}{\partial t}u$, $\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)^\nu u\in L^2(U\cap G)$, $|\nu|\le 2m$, alors si $f\in$

$C^\infty(\overline{U\cap G})$ et $g_j\in C^\infty(U\cap\partial G)$, $j=1,2,\cdots,m$, il existe un voisinage V de l'origine tel que $u(t,x)\in C^\infty(\overline{V\cap G})$.

Nous allons d'abord montrer une estimation à priori pour la solution u de (1.1) en suivante la méthode indiquée par M. Schechter dans [1]. Alors, d'aprèes la méthode des différences quotientes, on obtient le théorème ci-dessus.*)

Pour démontrer le théorème, il suffit de le montrer en supposant que $\varphi(t,x)\equiv x_{n-1}$. Ceci supposé, changeons les notations $(t,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\to(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},y)$. On désigne alors $x=(x_1,x')=(x_1,\cdots,x_{n-1})$. $R_+^n=\{(x,y);y>0\}$; $\Sigma_\delta=\{(x,y);|x|^2+y^2<\delta^2,\ y>0\}$; $\sigma_\delta=\{(x,0);|x|<\delta\}$. Soit $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_{n-1})$, $D^{\mu k}=D_x^\mu D_y^k=\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\mu\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)^k$.

Notons

$$|\mu|=2m\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n-1}. \tag{1.2}$$

Dans ces nouvelles coordonnées, (1.1) et 1), 2), et 3) deviennent

$$\begin{cases} Lu=\sum\limits_{|\mu|+k\le 2m}a_{\mu k}(x,y)D^{\mu k}u(x,y)=f(x,y), & (x,y)\in\Sigma_\delta,\\ B_ju=\sum\limits_{|\mu|+k\le m_j}b_{j\mu k}(x)D^{\mu k}u(x,0)=g_j(x), & x\in\sigma_\delta.\end{cases} \tag{1.1'}$$

1′) $P(\xi,\eta)=\sum\limits_{|\mu|+k=2m}a_{\mu k}\xi^\mu\eta^k\neq 0$ $(a_{\mu k}=a_{\mu k}(0,0))$, pour tout $(\xi,\eta)\neq(0,0)$, où $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$.

2′) Pour tout $\xi(\in R^{n-1})$, $\neq 0$, fixé, $P(\eta)\equiv P(\xi,\eta)$ se décompose en $P_+(\eta)P_-(\eta)$, où deux polynomes ont les même sens que le précédent. Alors $Q_j(\eta)\equiv Q_j(\xi,\eta)=\sum\limits_{|\mu|+k=m_j}b_{j\mu k}(0)\xi^\mu\eta^k$ $(j=1,2,\cdots,m)$ sont linéairement indépendants modulo $P_+(\eta)$ et aussi modulo $P_-(\eta)$.

3′) $a_{\mu k}(x,y)\in C^\infty(\overline{\Sigma}_\delta)$, $b_{j\mu k}(x)\in C^\infty(\sigma_\delta)$.

2. Espaces Φ^s, H^s. Nous conviendrons de noter

$$|\xi|=|\xi_1|^{\frac{1}{2m}}+|\xi'|,\ \text{où}\ |\xi'|=(\xi_2^2+\cdots+\xi_{n-1}^2)^{1/2} \tag{2.1}$$

Ceci remarqué, définissons la distribution $\gamma_s(x)\in(S')_x$ par

$$\hat{\gamma}_s(\xi)=(1+|\xi|)^s,\quad s\ \text{étant réel}. \tag{2.2}$$

Définition 1. Espace Φ^s. $u(x,y)\in L^2(R_+^n)$ apartient à Φ^s, $(s=0,1,\cdots)$, si $\gamma_{s-t}\underset{(x)}{*}D_y^tu\in L^2(R_+^n)$, pour $t=0,1,2,\cdots,s$. On munit Φ^s de la norme

$$\|u\|_s^2=\|\gamma_s*u\|_{L^2(R_+^n)}^2+\|\gamma_{s-1}*D_yu\|_{L^2(R_+^n)}^2+\cdots+\|D_y^su\|_{L^2(R_+^n)}^2, \tag{2.3}$$

Φ^s est un espace hilbertien.

Remarquons que, en écrivant désormais γ_s*u au lieu de $\gamma_s\underset{(x)}{*}u$, on a $\gamma_s*D_y^tu=D_y^t\gamma_s*u$ comme distribution dans R_+^n.

Concernant les propriétés de l'espace Φ^s, on a

Lemme 1. Si γ_s*u, $D_y^su\in L^2(R_+^n)$, on a $\gamma_{s-t}*D_y^tu\in L^2(R_+^n)$, $t=1,2,\cdots,s-1$, c'est-à-dire que $u\in\Phi^s$, et on a

* Récemment M.H. Tanabe a traité le même problème dans son article: On differentiability in time of solutions of some type of boundary value problems. Proc. Japan Acad., **40**, 649-653 (1964). Notre méthode est en différente.

$$(2.4) \qquad c\,\|\gamma_{s-t}*D_y^t u\| \leq \|\gamma_s*u\| + \|D_y^s u\|,$$

où la norme est à prendre au sens de $L^2(R_+^n)$, et c est une constante positive.

Remarque. (2.4) n'est qu'une relation d'interpolation. D'après ce lemme, on voit que $\|u\|_s$ est équivalente à $(\|\gamma_s*u\| + \|D_y^s u\|)$.

Lemme 2. Soient s et t deux entiers tels que $0<s<t$. Alors, pour tout $\varepsilon(>0)$, il existe une constante $C(\varepsilon)>0$ telle que

$$(2.5) \qquad \|u\|_s \leq \varepsilon\|u\|_t + C(\varepsilon)\|u\|, \quad \text{pour } u\in\Phi^t.$$

Définition 2. Espace H^s. $u(x)\in\mathcal{D}'_{L^2}(R^{n-1})$ appartient à H^s, si $\gamma_s*u\in L^2(R^{n-1})$. Désignons

$$(2.6) \qquad |u|_s = \|\gamma_s*u\|_{L^2(R^{n-1})}.$$

Remarquons qu'il existe entre Φ^s et H^s la relation suivante.

Lemme 3. Pour tout $u\in\Phi^s$, $(s\geq 1)$, telle que Supp $[u]\subset\bar{\Sigma}_\delta$, il existe la trace $u(x, 0)\in H^{s-\frac{1}{2}}$, et on a

$$(2.7) \qquad |u(x, 0)|_{s-\frac{1}{2}} \leq c\,\|u\|_s.$$

Ce qui est délicat est le lemme suivant.

Lemme 4.

1) Soit $u\in H^s$, Supp $[u]\subset\sigma_\delta$, (s étant réel positif ou négatif). Alors, pour $b(x)\in\mathcal{B}$, on a

$$(2.8) \qquad |b(x)u|_s \leq c\,|b(x)|_k\,|u|_s,$$

où $|b(x)|_k$ désigne la norme dans $\mathcal{B}^k$, k étant choisi convenablement (dépendant de s). En particulier, si $b(0)=0$, on a

$$(2.9) \qquad |b(x)u|_s \leq \varepsilon(\delta)\,|u|_s,$$

où $\varepsilon(\delta)\to 0$ avec $\delta\to 0$.

2) Soit $\gamma_s*u\in L^2(R_+^n)$ Supp. $[u]\subset\bar{\Sigma}_\delta$, alors pour $b(x, y)\in\mathcal{B}$,

$$(2.10) \qquad \|\gamma_s*b(x, y)u\| \leq c\,|b(x, y)|_k\,\|\gamma_s*u\|.$$

En particulier, si $b(0, 0)=0$, on a

$$(2.11) \qquad \|\gamma_s*b(x, y)u\| \leq \varepsilon(\delta)\,\|\delta_s*u\|.$$

où $\varepsilon(\delta)\to 0$ avec $\delta\to 0$.

Démonstration. On démontre d'abord en supposant que $s\geq 0$, suivant la méthode de Mizohata dans [2]. Dans ce cas, if faut remarquer que $\hat{\gamma}_s(\xi)=(1+|\xi|)^s$ n'est pas différentiable. Il est commode d'utiliser $\hat{\gamma}_s(\xi)=\{1+\xi_1^2+(\xi_2^2+\cdots+\xi_{n-1}^2)^{2m}\}^{\frac{s}{4m}}$ qui définit la morme équivalente.

En utilisant les lemmes, on montre la

Proposition. s étant réel quelconque, si $\{L; B_j\}$ satisfait à (1.1)′, et 1′), 2′), et 3′) dans l'Introduction, il existe alors un δ assez petit tel qu'on ait

$$(2.12) \qquad c\,\|\gamma_s*u\|_{2m}^2 \leq \|\gamma_s*Lu\|_{L^2(R_+^n)} + \|\gamma_s*u\|_{L^2(R_+^n)} + \sum_{j=1}^{m} |B_j u|_{s+(2m-m_j-\frac{1}{2})} \leq c^{-1}\|\gamma_s*u\|_{2m}$$

pour tout $u(x, y)$ ayant son support dans $\bar{\Sigma}_\delta$ et vérifiant $\gamma_s*u\in\Phi^{2m}$.

(c est une constante positive).

Démonstration. On suivre le raisonnement de Schechter ([1], p. 50–62), c'est-à-dire qu'on établit (2.12) dans le cas où tous les coefficients de L et B_j sont constants. Dans ce cas on doit convenir d'appeler qu'une fonction $p(\xi, \eta)$ est homogène de degré k, si pour tout $\lambda>0$, on a $p(\lambda^{2m}\xi_1, \lambda\xi_2, \cdots, \lambda\eta)=\lambda^k p(\xi, \eta)$. Ensuite les lemmes énoncés ci-dessus nous assure la validité de (2.12) même dans le cas général. c.q.f.d.

3. Démonstration du théorème 1. Comme d'habitude, on dit que $u\in\Phi^s_{\text{loc}}(\Sigma_\delta)$ si pour toute $\alpha(x, y)\in\mathcal{D}(B_\delta)$, ($B_\delta$ étant la boule: $|x|^2+y^2<\delta^2$), $\alpha u\in\Phi^s$. On dit que $u(x)\in H^s_{\text{loc}}(\sigma_\delta)$ si pour toute $\alpha(x)\in\mathfrak{D}(\sigma_\delta)$, $\alpha u\in H^s$.

On va montrer le théorème sous la forme plus précise:

Théorème 2. Supposons dans (1.1)′ que $u(x, t)\in\Phi^{2m}_{\text{loc}}(\Sigma_\delta)$. Alors, si $f\in\Phi^s_{\text{loc}}(\Sigma_\delta)$ et $g_j\in H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}_{\text{loc}}(\sigma_\delta)$, ($j=1, 2, \cdots, m$), $s=1, 2, 3, \cdots$, il existe un $\delta'(<\delta)$ tel qu'on ait

$$u\in\Phi^{2m+s}_{\text{loc}}(\Sigma_{\delta'}).$$

Démonstration. Nous nous limitons à démonstrer le théorème au cas où $s=1$. En utilisant (2.12) au cas de $s=0$, il est facile de voir que, pour toute $\alpha(x, y)\in\mathcal{D}(B_\delta)$,

$$D_j(\alpha u)\in\Phi^{2m}, \qquad \text{pour } j=2, 3, \cdots, n-1. \tag{3.1}$$

Considérons donc $D_1(\alpha u)$. Désignons $h_1=(h, 0, \cdots, 0)$; $\Delta g=g(x+h_1, y)-g(x, y)/h$, $\Delta L=\left\{L\left(x+h_1, y; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)-L\left(x, y; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\right\}/h$. En posant dans (2.12) $s=1-2m$, $u=\Delta(\alpha u)$, on a

$$\begin{aligned} c\,\|\gamma_{1-2m}*\Delta(\alpha u)\|_{2m} \le\ & \|\gamma_{1-2m}*L[\Delta(\alpha u)]\| \\ & +\|\gamma_{1-2m}*\Delta(\alpha u)\| +\sum_{j=1}^{m}|B_j[\Delta(\alpha u)]|_{1-2m+(2m-m_j-\frac{1}{2})} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Un calcul simple montre que

$$L[\Delta(\alpha u)]=\Delta(\alpha f)-\alpha(x+h_1)(\Delta L)[u(x+h_1, y)]+\varphi(x, y; h)$$
$$B_j[\Delta(\alpha u)]=\Delta(\alpha g_j)-\alpha(x+h_1)(\Delta B_j)[u(x+h_1, y)]+\psi(x; h),$$

où

1) $\gamma_{1-2m}*\varphi(x, y; h)$ est borné dans $L^2(R^n_+)$ lorsque h tend vers 0,
2) $\psi(x; h)$ est aussi borné dans $H^{2m-m_j-\frac{1}{2}+1-2m}$.

Ici on a utilisé le fait suivant: l'application $u(x, y)\to D^{\mu k}u(x, 0)$ est continue de Φ^s dans $H^{s-|\mu|-k-\frac{1}{2}}$, ($s\ge|\mu|+k+1$).

Or, l'hypothèse $\alpha f\in\Phi^1$ et $\alpha g_j\in H^{1+2m-m_j-\frac{1}{2}}$ entraînent que $\gamma_{1-2m}*\Delta(\alpha f)$ et $\Delta(\alpha g_j)$ sont bornés dans $L^2(R^n_+)$ et $H^{1-m_j-\frac{1}{2}}$ respectivement. En résumé, $\gamma_{1-2m}*\Delta(\alpha u)$ est resté borné dans Φ^{2m} lorsque h tend vers 0. D'où

$$\gamma_{1-2m}*D_1(\alpha u)\in\Phi^{2m}. \tag{3.3}$$

Compte tenu de (3.1) et (3.3) on a finalement

$$\gamma_1*(\alpha u)\in\Phi^{2m}. \tag{3.4}$$

En revenant à (1.1)′ et en prenant la différentiation en y, on aura

$$D_y^{2m+1}(\alpha u)=D_y(\alpha f)+\sum_{\substack{|\mu|+k\leq 2m+1\\ k\leq 2m}} c_{\mu k}(x, y)D^{\mu k}u, \quad c_{\mu k}(x, y)\in \mathcal{D}(B_\delta).$$

Or, il est aisé de voir que, compte tenu de (3.4), le second membre appartient à $L^2(R^n_+)$. On a donc montré que $\alpha u\in \Phi^{2m+1}$. c.q.f.d.

Finalement nous remercions M. le Professeur Mizohata pour son conseil bienveillant.

Bibliographie

[1] M. Schechter: Integral inequalities for partial differential operators and functions satisfying general boundary conditions. Comm. Pure. Appl. Math., **12**, 37-60 (1959).

[2] S. Mizohata: Une remarque sur les opérateurs différentiels hypoelliptiques et partiellement hypoelliptiques. J. Math. Kyoto Univ., I-3, 411-423 (1962).