# 117. *Sur le Théorème de la Continuité dans l'Espace de Deux Variables Complexes*

Par Ikuo KIMURA
Université de Kôbè

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Sept. 13, 1965)

**Introduction.** Le but de cette Note est d'obtenir des conditions pour la pseudoconvexité d'un domaine $D$ dans l'espace à deux variables $w$ et $z$. Comme on le sait bien, un domaine d'holomorphie est nécessairement pseudoconvexe [1], et cependant M. K. Oka a démontré que la réciproque est aussi vraie [2], [3]. Donc nos conditions cherchées seront aussi suffisantes pour que $D$ soit un domaine d'holomorphie.

Notre résultat principal est le théorème 1 que: si $D$ est pseudoconvexe par rapport à $w$ et si la projection sur le plan $w$ de la section de $D$ à $z=z_0$, dépend continûment de $z_0$, $D$ est pseudoconvexe. Le numéro 1 est consacré à établir ce théorème et un lemme pour cela. Dans le numéro 2 nous prouvons le théorème 2 et un corollaire qui montrent que la condition du théorème 1 est transformée à des autres de types plus concrets, si le domaine considéré $D$ possède une forme simple.

Dans la présente Note je me restreins toujours au cas où $D$ est un domaine *univalent* dans l'espace de deux variables complexes $w$ et $z$.

L'auteur se fait l'honneur d'exprimer ses remercîments sincères à M. le Prof. Kunugi, qui a témoigné son intérêt pour ce travail et a bien voulu donner des suggestions importantes au cours de la préparation de cette Note.

**1. Le cas général.** Soit $D$ un domaine *univalent* dans l'espace de deux variables complexes $w$ et $z$. Commençons par définir quelques notions pour le domaine $D$.

Soit $f(z, t)$ une fonction continue par rapport aux variables $z$ et $t$ sur l'ensemble $\{|z-z_0|\leqq r, 0\leqq t\leqq 1\}$, et telle que pour tout $t_0$ fixe $(0\leqq t_0\leqq 1)$, $f(z, t_0)$ soit une fonction holomorphe de $z$ dans un voisinage du cercle $|z-z_0|\leqq r$. Considérons la famille des surfaces analytiques

$$F_t : w=f(z, t), \quad |z-z_0|\leqq r, \quad 0\leqq t\leqq 1.$$

Nous disons que le domaine $D$ est *pseudoconvexe par rapport à* $w$, si les relations $F_t\subset D$ pour $0<t\leqq 1$ et $Fr.F_0\subset D$[1] entraînent $F_0\subset D$, quelque soit $f(z, t)$.

1) $Fr.F_0$ désigne la frontière de $F_0$.

On voit facilement que tout domaine d'holomorphie est pseudoconvexe par rapport à $w$.

Il me semble que la réciproque de ce fait est vraie, mais je n'ai pu surmonter une difficulté en sa démonstration. Nous nous contentons de la prouver sous une condition additionnelle.

Soit $D(z)$ l'ensemble ouvert $\{w \mid (w, z) \in D\}$ sur le plan $w$ pour $z$ fixe mais arbitraire. Nous disons que $D(z)$ *dépend continûment de* $z$, si pour tout $z_0$ et tout $w_0$ de $Fr.D(z_0)$ et pour tout $\varepsilon$ positif, il existe un nombre positif $\delta$ tel que $|z-z_0|<\delta$ entraîne dist. $[w_0, Fr.D(z)]<\varepsilon$.

Soit ensuite $R_{w_0}(z_0)$ la distance d'un point $w_0$ de $D(z_0)$ à la frontière de $D(z_0)$. La fonction $R_w(z)$ définie dans $D$ est, comme on dit, le rayon de Hartogs de $D$ par rapport à $w$.

**Lemme.** *Si $D$ est un domaine pseudoconvexe par rapport à $w$, la fonction $G(w, z)=-\log R_w(z)$ est plurisousharmonique dans $D$.*[2]

*Preuve.*[3] On voit facilement que $G(w, z)$ est semi-continu supérieurement dans $D$, puisque $D$ est ouvert. La démonstration se divise en deux parties.

(1) *$G(0, z)=-\log R_0(z)$ est sousharmonique dans un voisinage de l'origine $z=0$, lorsque $(0, 0) \in D$.*

Je dis d'abord que $G(0, z)$ ne peut admettre aucun maximum relatif au sens strict dans un voisinage de $z=0$. Pour raisonner par l'absurde, supposons que, $z'$ étant donné auparavant, il existe un cercle $|z-z'|\leqq r$ contenu dans un voisinage de $z=0$, tel que l'on ait

$$G(0, z)<G(0, z') \quad \text{sur} \quad |z-z'|=r.$$

Il existerait un nombre positif $m$ satisfaisant à

$$R_0(z)>m>R_0(z') \quad \text{sur} \quad |z-z'|=r,$$

puisque la fonction $R_0(z)$ est semi-continue inférieurement dans le voisinage de l'origine. Considérons la famille des surfaces analytiques

$$F_t: w=\frac{me^{i\theta}}{rt}(z-z'), \quad |z-z'|\leqq r, \quad 1\leqq t<\infty,$$

où $t$ est un paramètre réel et $\theta$ est un nombre réel, fixe mais d'ailleurs arbitraires. Pour $t$ suffisamment grand, nous avons $F_t \subset D$, car l'ensemble fermé $\{|z-z'|\leqq r, w=0\}$ est compris dans $D$. Pour tout $t$ $(1\leqq t<\infty)$ nous avons $Fr.F_t \subset D$, puisque $R_0(z)>m$ pour $|z-z'|=r$. Comme le domaine $D$ est pseudoconvexe par rapport à $w$, nous avons $F_1 \subset D$ pour tout $\theta$, c'est-à-dire que le polycercle fermé $\{|w|\leqq m, |z-z'|\leqq r\}$ est contenu dans $D$. Par conséquent on a $R_0(z')>m$, ce qui est une contradiction.

Soit maitenant $h(z)$ une fonction harmonique dans $|z|<\infty$, mais

2) Pour "plurisousharmonique", voir par exemple [4].

3) L'auteur doit la méthode de démonstration aux résultats de M. K. Oka [2], [3].

d'ailleurs arbitraire, et soit $f(z)$ une fonction entière dont la partie réelle est $-h(z)$.[4] Considérons la transformation biunivoque $(w, z) \to (W, Z)$

$$Z=z, \quad W=we^{f(z)}.$$

L'image $D'$ de $D$ par cette transformation est pseudoconvexe par rapport à $W$. La trace sur $W=0$ du rayon de Hartogs de $D'$ par rapport à $W$ est

$$R_0(z)e^{-h(z)}.$$

Donc, d'après ce que nous venons de démontrer, la fonction $-\log R_0(z)+h(z)$ ne peut admettre aucun maximum relatif au sens strict dans un voisinage de $z=0$.

En conséquence, par le critère bien connu des fonctions sousharmoniques, on peut démontrer que $G(0, z)$ est sousharmonique dans un voisinage de $z=0$.

(2) *Si* $(0, 0) \in D$, *alors* $G(az, z)$ *est sousharmonique dans un voisinage de* $z=0$ *pour tout* $a$ *fixe et* $G(w, 0)$ *est sousharmonique dans* $D(0)$.

En effet, transformons $D$ à un domaine $D'$ de l'espace des variables $W$ et $Z$ par

$$Z=z, \quad W=w-az.$$

Désignons par $R'_W(Z)$ le rayon de Hartogs de $D'$ par rapport à $W$. On a

$$R'_W(Z)=R_w(z),$$

puisque $W=w-az$ est une translation du plan $w$ pour tout $z$ fixe. D'ailleurs $D'$ est aussi pseudoconvexe par rapport à $W$. Donc la fonction $-\log R'_0(Z)$ est sousharmonique dans un voisinage de $Z=0$. En conséquence la fonction $G(az, z)$ est sousharmonique dans le même voisinage de $z=0$.

Ensuite on observe que la fonction $G(w, 0)$ est représentée sous la forme

$$G(w, 0)=\max. [-\log|w-w_0|],$$

où $w_0$ parcourt la frontière de $D(0)$. Or elle est continue dans $D(0)$. Donc $G(w, 0)$ est sousharmonique dans $D(0)$, ce qui établit (2).

Théorème 1. *Si $D$ est un domaine pseudoconvexe par rapport à $w$, et que $D(z)$ dépende continûment de $z$, $D$ est pseudoconvexe.*

*Preuve*. Examinons d'abord l'allure de la fonction $G(w, z)$ sur la frontière de $D$, fonction, que nous avons introduite dans le lemme précédent.

Etendons $R_w(z)$ au domaine fermé $\bar{D}$ en donnant 0 à sa valeur sur la frontière de $D$. La fonction ainsi étendue est semi-continue

4) Le reste de la démonstration est presque le même que celui de M. K. Oka. Mais on doit faire attention que les hypothèses sont un peu différentes.

inférieurement dans $\bar{D}$. Comme on va le voir, elle est semi-continue supérieurement, et donc continue dans $\bar{D}$. En effet, soit $(w_0, z_0)$ un point quelconque de $\bar{D}$. Si $R_{w_0}(z_0)$ est l'infini, l'énoncé est trivial. Si $R_{w_0}(z_0)\neq\infty$, il existe un point $w_1$ $(\neq\infty)$ tel que $|w_1-w_0|=R_{w_0}(z_0)$. $D(z)$ dépendant continûment de $z$, il existe un nombre positif $\delta$ tel que dist. $[w_1, Fr. D(z)]<\varepsilon$ pour tout $z$ dans le cercle $|z-z_0|<\delta$, où $\varepsilon$ est un nombre positif arbitraire. Par conséquent, nous avons l'inégalité $R_{w_0}(z)<R_{w_0}(z_0)+\varepsilon$ pour $z$ dans $|z-z_0|<\delta$. Comme la relation $R_w(z)\leqq R_{w_0}(z)+|w-w_0|$ est évidente, on a

$$R_w(z)<R_{w_0}(z_0)+2\varepsilon,$$

pour $z$ dans $|z-z_0|<\delta$ et $w$ dans $|w-w_0|<\varepsilon$, c'est-à-dire que

$$\overline{\lim_{(w, z)\to(w_0,z_0)}} R_w(z)\leqq R_{w_0}(z_0) \qquad ((w, z)\in\bar{D});$$

ceci montre que la fonction $R_w(z)$ est semi-continue supérieurement dans $\bar{D}$.

Par conséquent la fonction $G(w, z)$ plurisousharmonique et continue dans $D$ tend vers l'infini lorsque le point $(w, z)$ de $D$ s'approche de la frontière de $D$. En conséquence $D$ est pseudoconvexe.[5]

**2. Un cas simple.** Soit $D$ un domaine de la forme

$$D=\{(w, z)\mid V(z, \mathscr{R}w)<\mathscr{I}w\},$$

où $V(z, u)$ est une fonction donnée, réelle et définie dans $|z|<\infty$, $|u|<\infty$.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un voisinage du cercle $|z-z_0|\leqq r$; nous considérons la famille des surfaces analytiques

$$F_t : w=f(z)+it, \quad |z-z_0|\leqq r, \quad 0\leqq t<\infty,$$

où $t$ est un paramètre réel. Nous disons que le domaine $D$ est *faiblement pseudoconvexe par rapport à* $w$, si les relations $F_t\subset D$ pour $0<t<\infty$ et $Fr.F_0\subset D$ entraînent $F_0\subset D$, quelque soit $f(z)$.

Il est évident qu'un domaine pseudoconvexe, ou pseudoconvexe par rapport à $w$, est faiblement pseudoconvexe par rapport à $w$.

Pour le domaine $D$ nous avons le

Théorème 2. *Si le domaine* $D=\{V(z, \mathscr{R}w)<\mathscr{I}w\}$ *satisfait aux conditions* (1°) *et* (2°) *suivantes, $D$ est pseudoconvexe.*

(1°) *$D$ est faiblement pseudoconvexe par rapport à $w$;*

(2°) *Pour tout $u_0$ fixe, $V(z, u_0)$ est continue en tant que fonction de la variable $z$.*

*Remarque.* La fonction $V(z, u)$ est nécessairement semi-continue supérieurement, puisque l'inégalité $V(z, \mathscr{R}w)<\mathscr{I}w$ définit l'ensemble ouvert $D$.

*Preuve du théorème.* Soit $R_w(z)$ le rayon de Hartogs de $D$ par rapport à $w$. Nous montrons que la fonction $G(w, z)=-\log R_w(z)$ semi-continue supérieurement dans $D$ est plurisousharmonique dans $D$,

5) Voir [2], [3], [4].

en divisant la démonstration en deux parties (1) et (2) comme dans le numéro 1.

(1) $G(0, z) = -\log R_0(z)$ *est sousharmonique dans un voisinage de* $z=0$, *lorsque* $(0, 0) \in D$.

Pour raisonner par l'absurde, supposons qu'il existe un cercle $|z-z_0| \leqq r$ dans un voisinage de $z=0$, tel que la moyenne arithmétique de $G(0, z)$ sur la circonférence $|z-z_0|=r$ soit plus petite que $G(0, z_0)$; alors nous pourrions construire à l'aide de l'intégrale de Poisson une fonction $H(z)$ holomorphe dans un voisinage d'un cercle $|z-z_0| \leqq \rho$ $(0<\rho<r)$, tel que $H(z) \neq 0$ sur $|z-z_0| \leqq \rho$ et que

$$|H(z)| R_0(z) > 1 \quad \text{sur} \quad |z-z_0| = \rho, \qquad \text{et}$$
$$|H(z_0)| R_0(z_0) = 1.$$

Considérons maintenant la famille des surfaces analytiques

$$F_t : w = e^{i\theta}/H(z) + it, \quad |z-z_0| \leqq \rho, \quad 0 \leqq t < \infty,$$

où $t$ est un paramètre réel et $\theta$ un nombre réel fixe tel que $(e^{i\theta}/H(z_0), z_0) \notin D$. D'après la manière de construction, la frontière de $F_0$ est comprise dans $D$, mais le centre de $F_0$ n'y est pas compris. Mais $F_t$ est contenu dans $D$ pour $t$ suffisamment grand; c'est une contradiction avec l'hypothèse (1°).

(2) *Si* $(0, 0) \in D$, *alors* $G(az, z)$ *est sousharmonique dans un voisinage de* $z=0$ *pour tout* $a$ *fixe et* $G(w, 0)$ *est sousharmonique dans* $D(0)$.

En effet, transformons $D$ à un domaine $D'$ de l'espace des variables $W$ et $Z$ par

$$Z = z, \quad W = w - az.$$

$D'$ est aussi faiblement pseudoconvexe par rapport à $W$. Par suite, nous pouvons montrer, pareillement à la démonstration du lemme, que $G(az, z)$ est sousharmonique dans un voisinage de $z=0$. Ce que $G(w, 0)$ est sousharmonique dans $D(0)$, est démontré avec le même procédé que dans le lemme.

(1) et (2) preuvent que $G(w, z)$ est plurisousharmonique dans $D$.

Supposons maintenant que $w_0 \in Fr.D(z_0)$ et $\varepsilon > 0$, et posons $w_0 = u_0 + iv_0$. On a $v_0 = V(z_0, u_0)$. D'après l'hypothèse (2°), il existe un nombre positif $\delta$ tel que

$$|V(z, u_0) - V(z_0, u_0)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |z-z_0| < \delta.$$

Le point $u_0 + iV(z, u_0)$ se place sur la frontière de $D(z)$; donc nous avons

$$\text{dist.}\,[w_0, Fr.D(z)] < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |z-z_0| < \delta,$$

c'est-à-dire que $D(z)$ dépend continûment de $z$. Par conséquent on peut étendre continûment la fonction $R_w(z)$ à $\bar{D}$, en donnant 0 à sa valeur sur la frontière de $D$. Par le même raisonnement que dans la démonstration du lemme, nous obtenons une fonction plurisousharmonique et continue, qui tend vers l'infini lorsque le point $(w, z)$

de $D$ s'approche de la frontière de $D$. Donc le domaine $D$ est pseudoconvexe. C.Q.F.D.

**Corollaire.** *Si la fonction* $V(z, u)$ *satisfait aux conditions suivantes* (1), (2), *et* (3), *le domaine* $D=\{V(z, \mathscr{R}w)<\mathscr{I}w\}$ *est pseudoconvexe.*

(1) $V(z, u)$ *est semi-continu supérieurement;*

(2) *Pour tout* $u_0$ *fixe,* $V(z, u_0)$ *est continu en tant que fonction de* $z$;

(3) *Soit* $f(z)$ *une fonction holomorphe dans un voisinage d'un cercle* $|z-z_0|\leqq r$, $h(z)$ *sa partie réelle et* $k(z)$ *sa partie imaginaire. Si l'on a*

$$k(z)\geqq V(z, h(z))$$

*sur la circonférence* $C: |z-z_0|=r$, *la même inégalité subsiste dans le cercle* $|z-z_0|\leqq r$.

*Remarque.* On sait que, si $D$ est pseudoconvexe, les conditions (1) et (3) sont remplies. Ces deux propriétés ressemblent à ceux des fonctions sousharmoniques; en effet, si $V(z, u)$ ne dépend que de la varible $z$, le conjoint de (1) et (3) est équivalent à la définition des fonctions sousharmoniques.

*Preuve de corollaire.* Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un voisinage du cercle $|z-z_0|\leqq r$. Prenons la famille des surfaces analytiques

$$F_t: w=f(z)+it, \quad |z-z_0|\leqq r, \quad 0\leqq t<\infty,$$

et supposons que $F_t\subset D$ pour $t>0$ et que la frontière de $F_0$ soit située dans $D$. Posons $f(z)=h(z)+ik(z)$. Comme la frontière de $F_0$ est contenue dans $D$, nous avons $k(z)>V(z, h(z))$ sur la circonférence $C$. La fonction semi-continue inférieurement $k(z)-V(z, h(z))$ admet le minimum positif $d_0$ sur $C$, de sorte que l'on a $V(z, h(z))\leqq k(z)-d_0$ sur $C$. La fonction $f(z)-id_0=h(z)+i(k(z)-d_0)$ étant holomorphe dans un voisinage du cercle $|z-z_0|\leqq r$, on a $V(z, h(z))\leqq k(z)-d_0$ sur $|z-z_0|\leqq r$, d'après l'hypothèse (3). Cela montre que $F_0\subset D$. Par conséquent $D$ est faiblement pseudoconvexe par rapport à $w$, et donc d'après le théorème 2, le domaine $D$ est pseudoconvexe. C.Q.F.D.

## Références

[1] H. Behnke und P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergeb. d. Math., Bd. **3**, H. 3 (1934).

[2] K. Oka: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VI. Domaines pseudoconvexes. Tôhoku Math. Jour., **49**, 15–52 (1942).

[3] ———: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intérieur. Japanese Jour. of Math., **27**, 97–155 (1953).

[4] H. J. Bremermann: Complex Convexity. Trans. Amer. Math. Soc., **82**, 17–51 (1956).