

172. Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. II

Par Ikuo KIMURA

Université de Kôbé

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1965)

Introduction. Dans une Note antérieure [3], j'ai traité la pseudoconvexité par rapport à w et démontré que tout domaine D pseudoconvexe par rapport à w est pseudoconvexe si la section $D(z_0)$ de D à un plan $z = \text{const.}$ z_0 dépend continûment de z_0 . Dans cette présente Note, nous étudions quelques autres propriétés de la pseudoconvexité par rapport à une direction complexe, et montrons surtout qu'un domaine D est pseudoconvexe si D est pseudoconvexe à deux directions complexes distinctes. Pour la simplicité, nous limitons toujours notre considération aux domaines *univalents* dans l'espace de deux variables complexes, comme dans la Note antérieure.

1. Définitions et notations. Soit D un domaine *univalent* dans l'espace de deux variables complexes w et z . Soient a et b deux nombres complexes tels que $|a|^2 + |b|^2 = 1$; introduisons à nouveau les coordonnées W et Z par

$$Z = az - bw, \quad W = \bar{b}z + \bar{a}w.$$

Nous disons que le domaine D est *pseudoconvexe à la direction complexe* (a, b) ou simplement *pseudoconvexe* (a, b) , si D est pseudoconvexe par rapport à W (voir [3]) en tant que domaine dans l'espace de W et Z . Désignons par $R(w, z; a, b)$ le rayon de Hartogs $R_w(Z)$ de D par rapport à W au point $Z = az - bw$, $W = \bar{b}z + \bar{a}w$, dans l'espace de W et Z . La valeur $R(w, z; a, b)$ est dite *le rayon de Hartogs de D à la direction complexe* (a, b) . On démontre facilement que $R(w, z; a, b) = \inf \{ |u| \mid (w + au, z + bu) \notin D \}$. Dans le cas où $a=1$ et $b=0$, $R(w, z; a, b)$ n'est d'autre que le rayon de Hartogs de D par rapport à w . Enfin pour un nombre positif m , désignons par $D^{(m)}$ l'ensemble des points de D , dont les distances à la frontière de D sont plus grandes que m .

2. Lemmes. Le lemme suivant est une conséquence directe d'un lemme que nous avons donné dans [3].

Lemme 1. *Si D est un domaine pseudoconvexe à une direction complexe (a, b) ($|a|^2 + |b|^2 = 1$), la fonction $G(w, z; a, b) = -\log R(w, z; a, b)$ est plurisousharmonique dans D .*

Comme la préparation de la démonstration des résultats énoncés dans l'Introduction, établissons quelques autres lemmes.

Lemme 2. *Si D est un domaine pseudoconvexe par rapport à w , et m est un nombre positif, toutes les composantes connexes de $D^{(m)}$ sont pseudoconvexes par rapport à w .*

Preuve. Soit D_1 une des composantes connexes de $D^{(m)}$ et soit $f(z, t)$ une fonction continue sur $\{|z - z_0| \leq r, 0 \leq t \leq 1\}$ telle que $f(z, t_0)$ soit holomorphe dans un voisinage du cercle $|z - z_0| \leq r$ pour tout t_0 fixe. Considérons la famille des surfaces analytiques

$$F_t: w = f(z, t), |z - z_0| \leq r, 0 \leq t \leq 1,$$

et supposons que $F_t \subset D_1$ pour $0 < t \leq 1$ et $\text{Fr. } F_0 \subset D_1$ mais $F_0 \not\subset D_1$; alors il y a un point frontière (w_1, z_1) de D_1 tel que

$$w_1 = f(z_1, 0), |z_1 - z_0| < r,$$

et il y a un point frontière (w_2, z_2) de D tel que $|w_2 - w_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 = m^2$. Déplaçons la famille $\{F_t\}$ par la translation

$$W = w - w_1 + w_2, Z = z - z_1 + z_2,$$

et désignons par G_t l'image de F_t , de sorte que nous avons

$$G_t: w = g(z, t) = f(z + z_1 - z_2, t) - w_1 + w_2,$$

$$|z - z_0 + z_1 - z_2| \leq r, 0 \leq t \leq 1.$$

Si $0 < t \leq 1$ et $|z - z_0 + z_1 - z_2| \leq r$, on a

$$(f(z + z_1 - z_2, t), z + z_1 - z_2) \in D^{(m)},$$

puisque $F_t \subset D_1$ pour $0 < t \leq 1$. Par conséquent, pour $0 < t \leq 1$ on a $(g(z, t), z) \in D$, c'est-à-dire $G_t \subset D$. En outre on obtient $\text{Fr. } G_0 \subset D$ par le même raisonnement. Mais $(w_2, z_2) = (g(z_2, 0), z_2) \in G_0 \cap \text{Fr. } D$; ceci est une contradiction avec la pseudoconvexité de D par rapport à w .

Corollaire 1. *Si D est un domaine pseudoconvexe à une direction complexe (a, b) ($|a|^2 + |b|^2 = 1$), et que m soit un nombre positif, alors toutes les composantes connexes de $D^{(m)}$ sont aussi pseudoconvexes (a, b) .*

Lemme 3. *Soient donnés deux directions complexes distinctes $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ ($|a_j|^2 + |b_j|^2 = 1, j = 1, 2$), un nombre positif m et un domaine D ; soit D_1 une des composantes connexes de $D^{(m)}$. Désignons le rayon de Hartogs de D_1 à la direction complexe (a_1, b_1) et celui à la direction complexe (a_2, b_2) par $R_1(w, z)$ et $R_2(w, z)$ respectivement; alors la fonction*

$$F(w, z) = \min. \{R_1(w, z), R_2(w, z)\}$$

tend vers 0 lorsque le point (w, z) de D_1 s'approche de $\text{Fr. } D_1$.

Preuve. Pour raisonner par l'absurde, supposons qu'il existe une suite $(w_n, z_n), n = 1, 2, \dots$, de points de D_1 convergente vers un point (w_0, z_0) de $\text{Fr. } D_1$ et telle que nous ayons $F(w_n, z_n) \geq 2k_0, n = 1, 2, \dots$, pour un certain nombre positif k_0 . Soit (w'_0, z'_0) un point de $\text{Fr. } D$ satisfaisant à $|w'_0 - w_0|^2 + |z'_0 - z_0|^2 = m^2$, et j un des indices 1 et 2, mais fixe pour le moment; désignons par $B_j(w, z)$ le cercle $\{(w + a_j u, z + b_j u) \mid |u| \leq k_0\}$ et par $C_j(w, z)$ l'ensemble des points (w', z') tels

que $\text{dist. } \{(w', z'), B_j(w, z)\} < m$. La suite $C_j(w_n, z_n), n=1, 2, \dots$, converge vers $C_j(w_0, z_0)$. Par conséquent on a $C_j(w_0, z_0) \subset D$.

Introduisons à nouveau les coordonnées

$$Z = a_j z - b_j w, \quad W = \bar{b}_j z + \bar{a}_j w;$$

le changement des coordonnées conserve la distance. Soient (W_0, Z_0) et (W'_0, Z'_0) les coordonnées nouveaux des points (w_0, z_0) et (w'_0, z'_0) respectivement; $B_j(w_0, z_0)$ est représenté par

$$W = W_0 + u, \quad Z = Z_0, \quad |u| \leq k_0.$$

La fermeture de $C_j(w_0, z_0)$ comprend l'hypersphère $S: |W - W_0|^2 + |Z - Z_0|^2 = m^2$. Il est clair que le point (W'_0, Z'_0) appartient à S et à $\text{Fr. } C_j(w_0, z_0)$ en même temps. D'autre part, pour tout point (W', Z') ($W' - W_0 \neq 0$) sur S , il existe une valeur complexe u' autant petite que l'on veut, telle que

$$|W' - W_0 - u'|^2 + |Z' - Z_0|^2 < m^2,$$

donc l'intersection de S et $\text{Fr. } C_j(w_0, z_0)$ est identique à la circonférence $W = W_0, |Z - Z_0| = m$. Cela montre que l'on a

$$W'_0 = W_0, \quad |Z'_0 - Z_0| = m.$$

En revenant aux coordonnées antérieures w, z , nous voyons que le point frontière (w'_0, z'_0) de D est situé sur le plan troué au point (w_0, z_0) :

$$\bar{b}_j(z - z_0) + \bar{a}_j(w - w_0) = 0, \quad (w, z) \neq (w_0, z_0).$$

Mais les dex plans $\bar{b}_j(z - z_0) + \bar{a}_j(w - w_0) = 0, j=1, 2$ se coupent seulement en $w = w_0, z = z_0$, puisque $a_1 : b_1 \neq a_2 : b_2$. C'est une contradiction.

C.Q.F.D.

3. **Théorèmes.** Concernant la pseudoconvexité à une direction complexe nous avons le

Théorème 1. Soit $D_n, n=1, 2, \dots$, une suite croissante de domaines pseudoconvexes (a, b) ; le domaine $D = \lim D_n$ est aussi pseudoconvexe (a, b) , où (a, b) est une direction complexe donnée auparavant ($|a|^2 + |b|^2 = 1$).

Preuve. Il suffit de démontrer ce théorème dans le cas où $a=1, b=0$, c'est-à-dire de prouver que la limite D d'une suite croissante des domaines $D_n, n=1, 2, \dots$, pseudoconvexes par rapport à w est aussi pseudoconvexe par rapport à w .

Soit en effet $f(z, t)$ une fonction continue sur $\{|z - z_0| \leq r, 0 \leq t \leq 1\}$ telle que $f(z, t_0)$ soit holomorphe dans un voisinage du cercle $|z - z_0| \leq r$ pour tout t_0 fixe ($0 \leq t_0 \leq 1$). Considérons la famille des surfaces analytiques

$$F_t: w = f(z, t), \quad |z - z_0| \leq r, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

telle que $F_t \subset D$ pour $0 < t \leq 1$ et $\text{Fr. } F_0 \subset D$. L'ensemble compact $F_1 + \sum_{0 \leq t \leq 1} \text{Fr. } F_t$ étant compris dans D , pour un entier positif n, D_n contient cet ensemble. Comme D_n est pseudoconvexe par rapport à

w , nous avons $F_0 \subset D_n \subset D$.

C.Q.F.D.

Théorème 2. *Si D est un domaine pseudoconvexe à deux directions complexes distinctes (a_1, b_1) et (a_2, b_2) ($|a_j|^2 + |b_j|^2 = 1, j = 1, 2$), alors D est pseudoconvexe.*

Preuve. Soit m un nombre positif, et soit $D_1^{(m)}$ une des composantes connexes de $D^{(m)}$. $D_1^{(m)}$ est pseudoconvexe $(a_j, b_j)(j=1, 2)$, d'après le corollaire 1. Désignons par $R_j(w, z)$ le rayon de Hartogs de $D_1^{(m)}$ à la direction complexe $(a_j, b_j)(j=1, 2)$; $-\log R_j(w, z)$ est plurisousharmonique dans $D_1^{(m)}$ (le lemme 1). Donc la fonction $G(w, z) = \max. \{-\log R_1(w, z), -\log R_2(w, z)\}$ est plurisousharmonique dans $D_1^{(m)}$; de plus elle tend vers l'infini lorsque le point (w, z) de $D_1^{(m)}$ s'approche de Fr. $D_1^{(m)}$ (le lemme 3). Donc $D_1^{(m)}$ est pseudoconvexe d'après [1], [2]. Par conséquent D est pseudoconvexe, puisque $D = \lim_{m \rightarrow 0} D_1^{(m)}$.

On peut définir de même la pseudoconvexité par rapport à z comme celle par rapport à w et on a le

Corollaire 2. *Si D est un domaine pseudoconvexe par rapport à w et z , alors D est pseudoconvexe.*

Références

- [1] P. Lelong: Fonctions plurisousharmoniques; mesures de Radon associées. Applications aux fonctions analytiques. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles, 21-40 (1953).
- [2] H. J. Bremermann: Complex Convexity. Trans. Amer. Math. Soc., **82**, 17-51 (1956).
- [3] I. Kimura: Sur le théorème de la continuité dans l'espace de deux variables complexes. Proc. Japan Acad., **41** (7), 535-540 (1965).