44. *Sur les transformations intégrales dans les espaces homogènes*

Par Mitsuo MORIMOTO

Département de Mathématiques, Université de Tokio

(Comm. by Zyoiti SUETUNA, M.J.A., March 12, 1966)

On montrera dans cette note des résultats analogues à ceux de Gelfand-Graev [1] et Helgason [3] sur les《horocycles》et la《transformation de Radon》dans les espaces symétriques dans un cadre plus général.*)

§1. Les《horocycles》et la《transformation de Radon》. G désignera un groupe de Lie semi-simple connexe à centre fini de type non-compact et K un sous-groupe compact maximal, d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ [6, 7]. Fixons un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}$ dans le complément orthogonal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$ par rapport à la forme de Killing. Une forme linéaire $\lambda(\neq 0)$ sur l'espace $\mathfrak{a}$ s'appellera une *racine* (*restreinte*) si le sous-espace $\mathfrak{g}_\lambda$ n'est pas trivial, où $\mathfrak{g}_\lambda=\{X\in\mathfrak{g};\ [H, X]=\lambda(H)X$ pour tout $H\in\mathfrak{a}\}$. Un ordre lexicographique étant fixé une fois pour toutes sur l'espace dual de $\mathfrak{a}$, on désignera par Σ^+ l'ensemble des racines positives. Plus généralement, pour un sous-ensemble E du système fondamental F des racines, on notera $\Delta^+(E)$ l'ensemble des racines positives qui sont des combinaisons linéaires des éléments de E, et $\Sigma^+(E)$ le complément de $\Delta^+(E)$ dans Σ^+. Soient $\mathfrak{n}(E)=\Sigma\mathfrak{g}_\lambda\ (\lambda\in\Sigma^+(E))$, $\mathfrak{n}_1(E)=\Sigma\mathfrak{g}_\lambda\ (\lambda\in\Delta^+(E))$, $\mathfrak{a}'(E)=\{H\in\mathfrak{a},\ \lambda(H)=0$ pour tout $\lambda\in E\}$ et $\mathfrak{a}(E)=\mathfrak{a}\ominus\mathfrak{a}'(E)$ (le complément orthogonal). Alors $\mathfrak{n}(E)$ et $\mathfrak{n}_1(E)$ sont des sous-algèbres nilpotentes de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n}(E)$ est un idéal de $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}(\phi)=\mathfrak{n}(E)+\mathfrak{n}_1(E)$. Soient $B(E)$ le normalisateur de $\mathfrak{n}(E)$ dans G et $M(E)$ le centralisateur de $\mathfrak{a}'(E)$ dans K. On notera $\mathfrak{g}(E)$ la sous-algèbre semi-simple de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{a}(E)+\Sigma(\mathfrak{g}_\lambda+\mathfrak{g}_{-\lambda})\ (\lambda\in\Delta^+(E))$, $\mathfrak{k}(E)=\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}(E)$ une sous-algèbre compacte maximale de $\mathfrak{g}(E)$. Alors $\mathfrak{g}(E)=\mathfrak{k}(E)+\mathfrak{a}(E)+\mathfrak{n}_1(E)$ est une décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{g}(E)$. Soit A (resp. $A'(E)$, $A(E)$, N, $N(E)$, $N_1(E)$, $G(E)$) le sous-groupe analytique de G correspondant à la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{a}'(E)$, $\mathfrak{a}(E)$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}(E)$, $\mathfrak{n}_1(E)$, $\mathfrak{g}(E)$).

Une $N(E)$-sphère ou le《horocycle》généralisé dans l'espace symétrique G/K est, par définition, un orbite d'un sous-groupe de G conjugué au sous-groupe $N(E)$, c'est-à-dire un ensemble de la forme $xN(E)x^{-1}p=\{xnx^{-1}p;\ n\in N(E)\}$ où $x\in G$ et $p\in G/K$. On désignera par $S(G/K, N(E))$ l'ensemble des $N(E)$-sphères dans G/K:

*) L'exposé détaillé avec démonstrations paraîtra dans le《Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo》.

$$S(G/K, N(E))=\{xN(E)yp_0;\ x, y \in G\}=\{xN(E)p_0;\ x \in G\}$$

où $p_0=K \in G/K$. Le groupe G opère à gauche sur $S(G/K, N(E))$; $z \in G$, $\xi=xN(E)p_0 \longmapsto z\xi=zxN(E)p_0$.

Théorème 1. [3][1)] *On a*

$$S(G/K, N(E))=G/M(E)N(E).$$

La démonstration repose sur

Lemme 1. *Soit ρ une application linéaire bijective de $\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ sur $\mathfrak{p}$ définie par $X \longmapsto X+\theta X$ où θ est l'involution de Cartan. Alors $\rho(\mathfrak{a}+\mathfrak{n}_1(E))$ est le complément orthogonal de l'espace tangent à $N(E)p_0$ en p_0 dans $\mathfrak{p}$ qui s'identifie comme d'habitude avec l'espace tangent à G/K en p_0. L'espace $\mathfrak{a}'(E)$ est l'intersection de tous les sous-espaces abéliens maximaux dans $\rho(\mathfrak{a}+\mathfrak{n}_1(E))$.*

Comme $U(E)=M(E)N(E)$ est un sous-groupe fermé de G,[2)] on munira toujours $S(G/K, N(E))$ de la structure différentiable de $G/U(E)$ par le Théorème 1.

Théorème 2. [3][1)] *Soit π la projection de $G/U(E)$ sur $G/B(E)$ définie par*

$$\pi:\ G/U(E) \ni xU(E) \longmapsto xB(E).$$

Alors $G/U(E)$ est un espace fibré à base $G/B(E)$ et à projection π, chaque fibre étant isomorphe à $A'(E) \times G(E)/K(E)$ où $K(E)=G(E) \cap K$ est un sous-groupe compact maximal de $G(E)$, et l'opération de G commute avec π.

Soit H un sous-groupe fermé de G. On notera $\boldsymbol{D}(G/H)$ l'algèbre des opérateurs différentiels sur l'espace G/H invariants par G. Si V est un espace vectoriel, $S(V)$ désignera l'algèbre symétrique sur V. Soit W le groupe de Weyl (restreint), soit $W_E=\{s \in W;\ s|_{\mathfrak{a}'(E)}$ est trivial$\}$, et soit $I_E(\mathfrak{a})$ la sous-algèbre de $S(\mathfrak{a})$ des éléments invariants par W_E. Soient $\mathfrak{g}(E)=\mathfrak{k}(E)+\mathfrak{p}(E)$ la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}(E)$, $I(\mathfrak{p}(E))$ la sous-algèbre de $S(\mathfrak{p}(E))$ des éléments invariants par $K(E)$, et $I(\mathfrak{a}(E))$ la sous-algèbre de $S(\mathfrak{a}(E))$ des éléments invariants par $\overline{W}_E=\{s|_{\mathfrak{a}(E)};\ s \in W_E\}$.

Théorème 3. [3][1),3)] *On a*

$$\boldsymbol{D}(G/U(E)) \cong I(\mathfrak{p}(E)) \otimes S(\mathfrak{a}'(E)) \cong I(\mathfrak{a}(E)) \otimes S(\mathfrak{a}'(E)) \cong I_E(\mathfrak{a}).$$

La démonstration se réduit à

Lemme 2. *Soit $\mathfrak{q}(E)$ le sous-espace de $\mathfrak{k}$ orthogonal à $\mathfrak{m}(E)$. Alors la somme*

$$\mathfrak{g}(E)=(\mathfrak{p}(E)+\mathfrak{a}'(E)+\mathfrak{q}(E))+(\mathfrak{m}(E)+\mathfrak{n}(E))$$

est directe. Soit σ la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{p}(E)+\mathfrak{a}'(E)+\mathfrak{q}(E)$ définie par la somme directe ci-dessus. Alors la sous-algèbre de $S(\mathfrak{p}(E)+$

---

1) Helgason a démontré [3] cet énoncé dans le cas $E=\phi$.

2) Remarquons $U(F)=K$.

3) Le deuxième isomorphisme dépend de Harish-Chandra [2] et le troisième est trivial.

$\mathfrak{a}'(E)+\mathfrak{q}(E)$) *des éléments invariants par* $\sigma\circ Adu\,(u\in U(E))$ *est isomorphe à l'algèbre* $I(\mathfrak{p}(E))\otimes S(\mathfrak{a}'(E))$.

L'isomorphisme γ_E de $\boldsymbol{D}(G/U(E))$ sur $I_E(\mathfrak{a})$ est caractérisé par

Proposition 1.[1] *Soit* $f\in C^\infty(G/U(E))$ *telle que* $f\circ\pi_E|_{G(E)}\in C_0^\infty(G(E))$ *et que* $f(k\xi)=f(\xi)$ *pour tout* $k\in K$ *et* $\xi\in G/U(E)$. *On définit une fonction* X_f *sur* A *par la formule*

$$X_f(a)=e^{\rho_E(\log a)}\int_{N_1(E)}f\circ\pi_E(an)dn$$

où $a\in A$, $\rho_E=\frac{1}{2}\Sigma\lambda\ (\lambda\in\Delta^+(E))$ *et* π_E *est la projection canonique de* G *sur* $G/U(E)$. *Alors pour tout* $D\in\boldsymbol{D}(G/U(E))$, *on a*

$$X_{Df}=\gamma_E(D)X_f.$$

A chaque $f\in C_0^\infty(G/K)$, nous définissons une fonction f_E sur $S(G/K, N(E))=G/U(E)$ par la formule $f_E\circ\pi_E(x)=\int_{N(E)}f\circ\pi_F(xn)dn$ où $x\in G$. L'application $f\longmapsto f_E$ s'appellera la $N(E)$-transformation ou la ⟪transformation de Radon⟫ généralisée dans l'espace symétrique G/K.

Proposition 2.[1] *Si* $f\in C_0^\infty(G/K)$, *alors* $f_E\in C_0^\infty(G/U(E))$. *La* $N(E)$-*transformation* $f\longmapsto f_E$ *de* $C_0^\infty(G/K)$ *dans* $C_0^\infty(G/U(E))$ *est injective.*

§ 2. L'opérateur de transmutation.

Proposition 3. *On a*

$$U(E)\backslash G/K=A/W_E,$$

où A/W_E *est l'espace des classes mod.* W_E.

La démonstration repose sur la décomposition d'Iwasawa et celle de Cartan.

Soit $\mathcal{R}_E=\{f\in C^\infty(G/K); f(up)=f(p)$ pour tout $u\in U(E), p\in G/K\}$. Il est clair que $Df\in\mathcal{R}_E$ si $D\in\boldsymbol{D}(G/K)$ et si $f\in\mathcal{R}_E$. D'après la Proposition 3, une fonction $f\in\mathcal{R}_E$ peut être considérée comme une fonction définie sur A invariante par W_E, donc la restriction de $D\in\boldsymbol{D}(G/K)$ à $\mathcal{R}_E$ peut être considérée comme un opérateur différentiel $\delta_E(D)$ sur A que l'on appelle *la partie E-radiale de D*. Sauf le cas $E=\phi$, $\delta_E(D)$ n'est pas invariant par l'opération de A. Mais on peut *transmuer* $\delta_E(D)$ à $\gamma_F(D)$ qui est un opérateur différentiel sur A invariant par l'opération de A. Etendant des résultats de [4, 5], nous pouvons énoncer

Théorème 4. *Soit* $f\in\mathcal{R}_E$ *telle que* $f\circ\pi_F|_{G(E)}\in C_0^\infty(G(E))$. *On définit une fonction* X_f *sur* A *invariante par* W_E *par la formule*

$$X_f(a)=e^{\rho_E(\log a)}\int_{N_1(E)}f\circ\pi_E(an)dn \qquad \text{où } a\in A.$$

Alors on a $X_{Df}=\gamma_F(D)X_f$ *pour tout* $D\in\boldsymbol{D}(G/K)$.

Références

[1] I. M. Gelfand and M. I. Graev: The geometry of homogeneous spaces, group representations in homogeneous spaces and questions in integral geometry related to them I. Trudy Moscov. Mat. Obšč., **8**, 321-390 (1959).
[2] Harish-Chandra: Spherical functions on a semisimple Lie groups I, II. Amer. J. Math., **80**, 241-320; 553-613 (1958).
[3] S. Helgason: Duality and Radon transform for symmetric spaces. Amer. J. Math., **85**, 667-692 (1963).
[4] ——: Fundamental solutions of invariant differential operators on symmetric spaces. Amer. J. Math., **86**, 565-601 (1964).
[5] F. I. Karperevič: Orispherical radial parts of Laplace operators on symmetric spaces. Doklady Akademii Nauk, **143**, 1034-1037 (1962).
[6] C. C. Moore: Compactifications of symmetric spaces. Amer. J. Math., **86**, 201-218; 358-378 (1964).
[7] I. Satake: On representations and compactifications of symmetric spaces. Ann. Math., **71**, 77-110 (1960).