72. *Sur la méthode des espaces rangés. I*

By Kinjirô KUNUGI, M.J.A.

(Comm. April 12, 1966)

1. Considérons un espace aux voisinages, c'est-à-dire, un ensemble R non-vide, dont chaque point p possède une famille non-vide, des sousensembles de R, désignés par $V(p)$ et appellés voisinages du point p.

Rappelons-nous la notion "profondeur" d'un espace. Étant donné un point p d'un espace R, nous disons qu'une suite monotone décroissante de voisinages $V_\alpha(p)$ est du type γ, où γ est un nombre ordinal de Cantor, si α parcourt tous les nombres ordinaux inférieurs à γ et que les relations d'inclusion $V_\alpha(p)\supseteq V_\beta(p)$ ont lieux pour tous les nombres α, β tels qu'on ait $0\leq\alpha\leq\beta<\gamma$:

$$V_0(p)\supseteq V_1(p)\supseteq V_2(p)\supseteq \cdots \supseteq V_\alpha(p)\supseteq \cdots \tag{1}$$
$$0\leq\alpha<\gamma.$$

Si, de plus, il n'y a aucun voisinage $U(p)$ de p, tel qu'on ait

$$\bigcap_\alpha V_\alpha(p)\supseteq U(p),$$

la suite (1) est appellée "maximale". Si un point p de R ne possède aucune suite de voisinages qui est maximale, nous disons que la profondeur de R au point p est "*l'infini actuel*". Dans les autre cas, nous définissons la *profondeur de R au point p* comme le plus petit nombre ordinal des types des suites monotone décroissantes et maximales des voisinages de p. Nous le désignons par

$$\omega(R, p).$$

Le plus petit nombre ordinal des profondeurs $\omega(R, p)$ de R aux points p, p étant variable, s'appelle "la *profondeur de l'espace R*". Nous le désignons par

$$\omega(R).$$

Il faut remarquer que $\omega(R)$ est égal ou bien à 1 ou bien à un nombre limite inaccessible.[1] Si le système des voisinages $\{V(p)\}$ du point p de R satisfait à l'axiome (B) de Hausdorff:[2]

(B) Pour deux voisinages $U(p)$, $V(p)$ quelconques de p, il en existe un troisième $W(p)$ tel que

$$W(p)\subseteq U(p)\cap V(p)$$

alors le premier cas est exclu.

Supposons dans la suite que l'axiome (B) de Hausdorff a toujours

1) F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig (Veit), p. 213 (1914).

2) Un nombre limite α est dit inaccessible, si, pour tout β tel que $\beta<\alpha$ et pour toute fonction $\alpha(\gamma)$ définie pour γ, $0\leq\gamma<\beta$ et telle que $0\leq\alpha(\gamma)<\alpha$, on a nécessairement $\sup_\gamma \alpha(\gamma)<\alpha$.

lieu. Choisissons une fois pour toutes un nombre ω ordinal, limite et inaccessible, tel qu'on ait

$$\omega_0 \leq \omega \leq \omega(R),$$

et appelons-le "indicateur" de l'espace R.

2. *Définition de l'espace rangé.*[3] Étant donné un nombre ordinal α, qui, parcourt l'intervalle $0 \leq \alpha < \omega$, supposons que nous ayons une famille $\mathfrak{U}_\alpha$ des voisinages, dits voisinages de rang α. Appelons R "un *espace rangé*", si la suite des familles $\mathfrak{U}_\alpha$ $(0 \leq \alpha < \omega)$ satisfait à l'axiome (a):

(a) Pour tout voisinage $V(p)$ de p (p étant un point quelconque de R) et pour tout nombre α tel que $0 \leq \alpha < \omega$, il existe un nombre β et un voisinage $U(p)$ de p tels qu'on ait à la fois

$$\alpha \leq \beta < \omega, \quad U(p) \subseteq V(p), \quad U(p) \in \mathfrak{U}_\beta$$

3. *Définition de la convergence d'une suite des points.* Étant donné une suite des points de R

$$p_0, p_1, p_2, \cdots, p_\alpha, \cdots, \quad 0 \leq \alpha < \omega \tag{2}$$

et un point p de l'espace rangé R, nous disons que la suite (2): $\{p_\alpha\}$ converge vers le point p, s'il existe une suite monotone décroissante des voisinages $V_\alpha(p)$ de p:

$$V_0(p) \supseteq V_1(p) \supseteq V_2(p) \supseteq \cdots \supseteq V_\alpha(p) \supseteq \cdots \tag{3}$$

et une suite monotone croissante des nombres ordinaux:

$$\gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \cdots \leq \gamma_\alpha \leq \cdots, \quad 0 \leq \gamma_\alpha < \omega \tag{4}$$

telles qu'on ait à la fois

$$p_\alpha \in V_\alpha(p), \quad V_\alpha(p) \in \mathfrak{U}_{\gamma_\alpha} \quad \text{pour} \quad 0 \leq \alpha < \omega$$
$$\text{et} \quad \sup_\alpha \gamma_\alpha = \omega.$$

Dans ce cas, nous écrirons

$$p \in \{\lim_\alpha p_\alpha\}. \tag{5}$$

Étant donnée une suite des points $\{p_\alpha\}$, $0 \leq \alpha < \omega$, de l'espace R, nous disons qu'une suite des points

$$\{p_{\alpha(\beta)}\}, \quad 0 \leq \beta < \omega$$

est une *suite partielle* de la suite $\{p_\alpha\}$, si $\alpha(\beta)$ se trouvent dans les α, et que $\alpha(\beta)$ est une application univoque et croissante de β, c'est-à-dire, si l'on a, pour toute paire (β, β'),

$$0 \leq \alpha(\beta) < \alpha(\beta')$$

dès qu'on ait $0 \leq \beta < \beta' < \omega$.

Il est facile maintenant d'établir la proposition suivante:

---

3) Quant aux espaces rangés, voir

K. Kunugi: Sur les espaces complets et régulièrement complets, I. Proc. Japan Acad., **30**, 553-556 (1954).

T. Shirai: A remark on the ranked space et ibidem II. Proc. Japan Acad., **33**, 553-556 (1957).

H. Okano: Some operations on the ranked spaces, I. Proc. Japan Acad., **33**, 172-176 (1957).

Proposition 1. *Si, pour une suite des points* $\{p_\alpha\}$, $0\leq\alpha<\omega$ *et un point* p *de l'espace* R, *on a*

$$p\in\{\lim_\alpha p_\alpha\},$$

alors, pour toute suite partielle $\{p_{\alpha(\beta)}\}$, $0\leq\beta<\omega$, *de la suite* $\{p_\alpha\}$, *on a*

$$p\in\{\lim_\beta p_{\alpha(\beta)}\}.$$

3. Introduisons maintenant le deuxième axiome:

(*b*) L'espace R lui-même est un voisinage de chaque point p de R et il appartient à la famille $\mathfrak{U}_0$.

Alors, il est facile d'établir la proposition suivante:

Proposition 2. *Soit donnée une suite de points* $\{p_\alpha\}$, $0\leq\alpha<\omega$ *d'un espace rangé* R *satisfaisant a l'axiome* (*b*). *Si, pour un nombre ordinal* α_0, $0\leq\alpha_0<\omega$, *et un point* p *de* R, *on a*

$$p\in\{\lim_\alpha p_{\alpha_0+\alpha}\},$$

on a nécessairement

$$p\in\{\lim_\alpha p_\alpha\}.$$

4. Ensuite, supposons que l'axiome suivant, dit l'axiome (A) de Hausdorff[4] ait lieu:

(A) Chaque voisinage $V(p)$ de p contient la point p. D'après cette supposition, il est évident que nous avons la proposition suivante:

Proposition 3. *Si, pour une suite des points* $\{p_\alpha\}$, $0\leq\alpha<\omega$, *d'un espace rangé satisfaisant à l'axiome* (A), *on a constamment*

$$p_\alpha=p,\quad 0\leq\alpha<\omega,$$

alors, nous avons nécessairement

$$p\in\{\lim_\alpha p_\alpha\}.$$

5. Montrons maintenant qu'il est possible qu'une même suite $\{p_\alpha\}$ des points d'un espace rangé R tend vers deux points différents de R:

$$p\in\{\lim_\alpha p_\alpha\},\quad q\in\{\lim_\alpha p_\alpha\},\qquad (6)$$
$$p\neq q,\quad p,q\in R.$$

Pour cela, considérons l'espace R à deux dimensions, dont les points sont représentés par deux coordonnées x et t, $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<t<+\infty$: $p=(x,t)$. D'autre part, prenons un nombre positif l_0 (assez grand) fixé une fois pour toutes. Soit l un nombre quelconque, supérieur à l_0: $l_0<l<+\infty$. Pour tout point $p_0=(x_0,t_0)$ de R, définissons le voisinage

$$V_{n,l}(p_0)$$

dépendant d'un nombre entier positif n ($n=1,2,\cdots$) et de l. $V_{n,l}(p_0)$ est l'ensemble de tous les points $p=(x,t)$ de R, dont les coordonnées x, t satisfont aux inégalités suivantes:

4) F. Hausdorff: loc. cit.

1°) $-\infty < t < t_0$

2°) $0 \leq c^2(t-t_0)^2-(x-x_0)^2 < c^2/n^2$

3°) $0 \geq c^2(x-x_0)^2-(t-t_0+l\sqrt{1+c^2})^2$

où c est une contante positive.

Le système de voisinages $V_{n,l}(p_0)$, $p_0=(x_0, t_0)$ de l'espace R satisfait à l'axiome (A) et (B) de Hausdorff, mais ni à l'axiome (C), ni à l'axiome (D) que voici:

(C) À tout point q d'un voisinage quelconque $V(p)$ d'un point p, il existe un voisinage $U(q)$ de q qui est un sous-ensemble de

$$V(p)\colon\ U(q) \subseteq V(p).$$

(D) À toute paire (p, q) de deux points distincts p, q de R, il existe un voisinage $V(p)$ de p et un voisinage $U(q)$ de q, qui sont disjoints l'un de l'autre:

$$U(q) \cap V(p) = O \quad \text{(ensembre vide).}$$

Pour voir que l'axiome (D) n'est pas satisfait, nous n'avons qu'à prendre deux points $p=(0, 0)$ et $q=(x_1, 0)$ où x_1 satisfait à

$$0 < x_1 < 2l_0/\sqrt{1+(1/c)^2}.$$

D'autre part, notre système de voisinages satisfait à l'axiome (T_0) de séraration de Kolmogoroff, qui est plus général que (D). Pour l'exprimer, introduisons d'abord une définition: nous disons qu'un point p est *séparé* du point q, lorsqu'il existe un voisinage $V(p)$ de p qui ne contient pas le point q.

L'axiome (T_0). De toute paire (p, q) de deux points distincts p, q, $p \neq q$ de R, il existe au moins un des deux qui est séparé de l'autre.

À défaut de l'axiome (C), notre système de voisinages ne donne pas la topologie au sens de Bourbaki.[5] Mais, il est très facile de voir que cet espace R peut être regardé comme un espace rangé. En effet, la profondeur de R est égale à ω_0 à chaque point de R. Donc, en prenant ω_0 comme l'indicateur, nous pouvons définir la suite des familles $\mathfrak{U}_\alpha$, $0 \leq \alpha < \omega_0$ comme il suit:

$\mathfrak{U}_0$ se compose d'un seul ensemble R, tandis que $\mathfrak{U}_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ est la famille de tous les voisinages $V_{n,l}(p)$, l et p étant variables. La suite $\{\mathfrak{U}_\alpha\}$, $0 \leq \alpha < \omega_0$ des familles de voisinages ainsi définie satisfait à l'axiome (a) et à l'axiome (b) de l'espace rangé.

Revenons à la première question. Pour voir qu'il existe, dans R, une suite des points $\{p_\alpha\}$, $0 \leq \alpha < \omega_0$ satisfaisant à (6), nous n'avons qu'à considérer la suite

$$p_\alpha = \left(0, \ -\frac{1}{1+\alpha}\right)$$

5) N. Bourbaki: Éléments de Mathématique (Actualités Scientifiques et Industrielles 858-1142), II Première Partie, Les Structures Fondamentales de l'Analyse, Livre III, Topologie Générale. Paris, pp. 9-13 (1951).

et deux points $p=(0, 0)$, $q=(x_0, t_0)$, où x_0, t_0 satisfont aux relations:

$$x_0=ct_0,\quad 0<x_0<l_0\ (1+1/c)^{-1/2}.$$

6. Définition de la convergence propre. Étant donnés une suite des points p_α, $0\leq\alpha<\omega$ et un point p de l'espace rangé R, nous disons que la suite $\{p_\alpha\}$ *converge proprement* vers p ou que p est une *limite propre* de $\{p_\alpha\}$, et nous l'écrivons par

$$p \in \{\operatorname*{lim\text{-}prop}_\alpha p_\alpha\}, \tag{7}$$

si 1°) on a

$$p \in \{\lim_\alpha p_\alpha\}, \tag{8}$$

que 2°) lorsque p est séparé d'un autre point q, il existe une suite monotone decroissante de voisinages $V_\alpha(p)$, $0\leq\alpha<\omega$ qui définit la relation (8), et un nombre ordinal $\alpha_0, 0\leq\alpha_0<\omega$, tel que $V_{\alpha_0}(p)$ ne contient pas le point q, et enfin que 3°) lorqu'un point q est séparé du point p, pour tout voisinage $U(q)$ de q qui ne contient pas le point p, il existe un nombre ordinal β_0, $0<\beta_0<\omega$ tel que tous les voisninages $W(q)$ de q qui sont contenus dans $U(q)$ et qui sont de rang supérieur à β_0 ne contiennent le point p_β que pour β inférieur à δ_0, $0\leq\delta_0<\omega$, δ_0 dépendant de $W(q)$.

Cette définition étant donnée, nous pouvons voir très facilement que la proposition suivante est vraie:

Proposition 4. *Si l'espace rangé R satisfait à l'axiome (T_0), la limite propre consiste en un seul point; en d'autres termes, si l'on a*

$$p, q \in \{\operatorname*{lim\text{-}prop}_\alpha p_\alpha\}$$

pour deux points p et q et pour une même suite $\{p_\alpha\}$, alors on a nécessairement

$$p=q.$$

Remarque. Pour le cas où la limite (ou la limite propre) consiste en un seul point, nous écrivons

$$p=\lim_\alpha p_\alpha \quad (\text{ou } p=\operatorname*{lim\text{-}prop}_\alpha p_\alpha)$$

au lieu de (5) (ou de (7)).