26. *Remarque sur l'ensemble analytique défini par* $y^m = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

Par Ikuo KIMURA

Université de Kôbé

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Feb. 13, 1967)

Considérons dans l'espace x, y un ensemble analytique, principal et irréductible à l'origine. Supposons que cet ensemble soit défini par les zéros d'un pseudo-polynôme irréductible à l'origine

$$y^m + a_1(x)y^{m-1} + \cdots + a_m(x),$$

où m est un entier $m \geqq 1$ et que $a_i(x)$ sont des fonctions holomorphes à $x=0$ et satisfaisant à $a_i(0)=0$. On sait que cet ensemble est normal à l'origine si et seulement si ou bien $m=1$ ou bien le premier coefficient c_1 de la série de Puiseux

$$y = c_1 x^{\frac{1}{m}} + c_2 x^{\frac{2}{m}} + \cdots$$

définissant cet ensemble ne s'annule pas. Ce critère est simple et applicable pour les ensembles analytiques, principaux et irréductibles, puisqu'ils sont toujours transformés analytiquement et biunivoquement à ceux de la forme expliquée ci-dessus. Mais cela est en défaut si le nombre de variables est plus grand que 2. J'ai cherché des conditions simples autant que possible pour la normalité d'ensembles dans l'espace de variables en nombre plus grand que 2. Mais dans cette Note, nous nous contentons de nous limiter aux ensembles qui peuvent être définis par des équations de type $y^m = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Soit A l'ensemble analytique dans l'espace $x_1, x_2, \cdots, x_n, y (n>1)$ défini par

$$y^m = f(x) (= f(x_1, x_2, \cdots, x_n)),^{*)}$$

dont le deuxième membre est une fonction holomorphe à l'origine $x=0$ telle que $f(0)=0$ et où m est un entier plus grand que 1.

Soit z une *fonction holomorphe sur* A, c'est-à-dire une fonction définie et holomorphe sur les points réguliers de A et bornée dans un voisinage d'un point quelconque de A. Pour que A soit *normal* à l'origine $(x, y)=0$, par définition, il faut et il suffit de pouvoir trouver une fonction $h(x, y)$ holomorphe à l'origine et satisfaisant à

$$z = h(x, y) \text{ en points réguliers de } A.$$

---

*) Pour la simplicité, nous exprimons dans la suivante les points $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ par x et (x, y), respectivement. En plus nous désignons l'origine de l'espace $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et celui de l'espace $x_1, x_2, \cdots, x_n, y$ simplement par le zéro 0.

En vertu du théorème du reste, il existe, dans un voisinage de l'origine, une fonction holomorphe $g(x, y)$ et un pseudo-polynôme holomorphe $r(x, y)$ de degré $m-1$ au plus, tels que l'on ait

$$h(x, y)=g(x, y)(y^m-f(x))+r(x, y).$$

Donc on peut toujours supposer que $h(x, y)$ soit un pseudo-polynôme par rapport à y, de degré $m-1$ au plus. Soit A_0 l'ensemble des points (x, y) de A tels que $y\neq 0$; on a

$$\dim. (A-A_0)<\dim. A.$$

Donc toute fonction holomorphe sur A_0 et bornée dans un voisinage d'un point quelconque de A, peut être prolongée analytiquement sur A. En conséquence, *si l'origine est un point normal de A, toute fonction z définie et holomorphe sur A_0 et bornée dans un voisinage d'un point quelconque de A, est représentée, dans un voisinage de l'origine, par un pseudo-polynôme*

$$h(x, y)=a_0+a_1y+\cdots+a_{m-1}y^{m-1},$$

où a_i sont des fonctions de x holomorphes à l'origine.

Soient maintenant $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ les facteurs de $f(x)$, irréductibles et mutuellement distincts en $x=0$, de sorte que

$$f(x)=f_1(x)^{p_1}f_2(x)^{p_2}\cdots f_s(x)^{p_s},$$

où les p_i sont des entiers positifs.

1. Considérons le cas où $(m, p_1)=d>1$. Soient k et l les entiers tels que $m=dk, p_1=dl, (k, l)=1$: posons

$$z=y^k/f_1(x)^l=(f_2^{p_2}\cdots f_s^{p_s})^{\frac{1}{d}},\ (x, y)\in A_0.$$

Alors z est holomorphe sur A_0 et borné dans un voisinage de l'origine. Or il existe des points de A, $(a, 0)=(a_1, a_2, \cdots, a_n, 0)$ arbitrairement voisins de l'origine tels que $f_1(a)=0$ et $f_2(a)f_3(a)\cdots f_s(a)\neq 0$. Par conséquent, il existe d valeurs limites distinctes de z pour $(x, y)\to(a, 0)$, $(x, y)\in A_0$. Donc z ne peut être représenté par aucune fonction holomorphe dans un voisinage de l'origine, c'est-à-dire que l'origine est un point non-normal de A.

2. Supposons que $m\leqq p_1$. Soient k et l les entiers tels que $p_1=mk+l, k\geqq 1, 0\leqq l<m$. Dans le cas où $l=0$, d'après le n^0 1, l'origine est non-normal. Supposons que $l>0$, et considérons la fonction holomorphe

$$z=y/f_1^k=(f_1^lf_2^{p_2}\cdots f_s^{p_s})^{\frac{1}{m}},\ (x, y)\in A_0,$$

qui est bornée dans un voisinage de l'origine.

Si $s>1$, pour N entier positif, l'équation

$$f_1=(f_2^{p_2}\cdots f_s^{p_s})^N$$

admet une solution S qui peut se prolonger sur un voisinage suffisamment petit de l'origine $x=0$ et aussi sur la partie commune d'un voisinage suffisamment petit de l'origine $x=0$ et l'ensemble $\{f(x)\neq 0\}$. Tout le long de la solution S on a

$$|z|=|f_1|^{\frac{l}{m}+\frac{1}{mN}}.$$

D'autre part, si $s=1$, on a $|z|=|f_1|^{\frac{l}{m}}$.

Posons $\varepsilon=\dfrac{1}{mN}$ quand $s>1$, et $\varepsilon=0$ quand $s=1$. On a

$$|z|=|f_1|^{\frac{l}{m}+\varepsilon},\ (x, y)\in A_0,\ x\in S,$$

où S désigne un voisinage de l'origine $x=0$, si $s=1$.

Pour raisonner par l'absurde, supposons que A soit normal à l'origine, en d'autres termes qu'il existe un pseudo-polynôme par rapport à y,

$$h(x, y)=a_0+a_1y+\cdots+a_{m-1}y^{m-1},$$

où a_i sont des fonctions de x, holomorphes dans un voisinage de $x=0$ et tel que l'on ait $z=h(x, y)$ sur A_0. Alors $f_1=0$ entraîne $z=0$ donc $a_0=0$. Donc a_0 est divisible par f_1. D'autre part, dans un voisinage de l'origine

$$|a_iy^i|/|f_1|^{\left(k+\frac{l}{m}\right)i} \text{ et donc } |a_iy^i|/|f_1|$$

sont bornés pour $1\leqq i<m$ et pour $(x, y)\in A_0$. Par suite, dans un voisinage de l'origine le quotient $|z|/|f_1|$ est borné sur A_0. Mais, pour tout (x, y) de A_0 tel que $x\in S$ et (x, y) assez voisin de l'origine, on a

$$|z|/|f_1|=|f_1|^{\frac{l}{m}-1+\varepsilon},$$

ce qui est impossible, si ε est assez petit. Par conséquent, $m\leqq p_1$ entraîne que l'origine est un point non-normal de A.

3. Traitons dans ce n^0 le cas où $1<p_1<m$. Soient k et l les entiers tels que $m=kp_1+l$, $k\geqq 1$, $0\leqq l<p_1$. Si $l=0$, d'après le n^0 1, l'origine n'est pas normal. Donc on peut supposer que $l>0$. Posons

$$z=y^{k+1}/f_1=\left(f_1^{\frac{p_1-l}{k+1}}f_2^{p_2}\cdots f_s^{p_s}\right)^{\frac{k+1}{m}}.$$

Alors la fonction z est holomorphe sur A_0 et bornée dans un voisinage de l'origine. Considérons le même ensemble S qui a été défini dans le n^0 précédent. On a, dans un voisinage de l'origine,

$$|z|=|f_1|^{\frac{p_1-l}{m}+\varepsilon'} \text{ pour } (x, y)\in A_0,\ x\in S,$$

où $\varepsilon'=\dfrac{k+1}{mN}$ quand $s>1$, et $\varepsilon'=0$ quand $s=1$. S'il existait un pseudo-polynôme holomorphe

$$h(x, y)=a_0+a_1y+\cdots+a_{m-1}y^{m-1}$$

tel que $z=h(x, y)$ sur A_0, alors $f_1=0$ entraînerait $z=0$ et donc $a_0=0$. Par conséquent, a_0 serait divisible par f_1 et $|a_iy^i|/|f_1|^{\frac{p_1}{m}i}$ serait borné dans un voisinage de l'origine, pour $1\leqq i<m$ et $(x, y)\in A_0$. Donc sur A_0, le quotient $|z|/|f_1|^{\frac{p_1}{m}}$ serait borné dans un voisinage de l'origine. D'autre part, dans un voisinage de l'origine,

on a

$$|z|/|f_1|^{\frac{p_1}{m}}=|f_1|^{\varepsilon'-\frac{l}{m}} \text{ pour } (x, y)\in A_0,\ x\in S;$$

c'est impossible, si ε' est assez petit. Par conséquent, si $1<p_1<m$, l'origine n'est pas normal.

4. Enfin considérons le cas où $p_1=p_2=\cdots=p_s=1$. Soit z une fonction holomorphe sur A; alors, d'après un résultat bien connu, il existe m fonctions $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\cdots$, $a_{m-1}(x)$ de x holomorphes dans un voisinage de $x=0$ et telles que l'on ait

$$z=\frac{a_0+a_1y+\cdots+a_{m-1}y^{m-1}}{y^{m-1}} \quad \text{pour } (x, y)\in A_0.$$

Or $f_1=0$ entraîne $y=0$ et donc $a_0=0$; par suite a_0 est divisible par f_1. De même a_0 est divisible par $f_2, f_3, \cdots, f_s$. Donc a_0 est devisible par $f=f_1f_2\cdots f_s$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction holomorphe $a_0'(x)$ telle que l'on ait $a_0=a_1'f$. En conséquence, on a

$$z=\frac{a_0'y^{m-1}+a_1+a_2y+\cdots+a_{m-1}y^{m-2}}{y^{m-2}} \quad \text{pour } (x, y)\in A_0.$$

Par un pareil raisonnement, on démontre qu'il existe une fonction holomorphe $a_1'(x)$ telle que l'on ait $a_1=a_1'f$. Donc, on a

$$z=\frac{a_0'y^{m-2}+a_1'y^{m-1}+a_2+\cdots+a_{m-1}y^{m-3}}{y^{m-3}} \quad \text{pour } (x, y)\in A_0.$$

Et continuant ainsi, on preuve qu'il existe des fonctions holomorphes a_2', a_3', $\cdots$, a_{m-2}' telles que:

$$z=a_0'y+a_1'y^2+\cdots+a_{m-2}'y^{m-1}+a_{m-1} \quad \text{pour } (x, y)\in A_0.$$

En conséquence, l'origine est un point normal de A.

D'après 2, 3, 4, on a la proposition suivante.

Soit $f(x)=f_1(x)^{p_1}f_2(x)^{p_2}\cdots f_s(x)^{p_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles d'une fonction holomorphe $f(x)$ à l'origine, où on suppose que $f(0)=0$. Soit m un entier plus grand que 1. Alors l'origine est un point normal de l'ensemble analytique défini par $y^m=f(x)$, si et seulement si $p_1=p_2=\cdots=p_s=1$.