34. *Sur les suites filtrantes de nombres*

Par Tokui SATŌ et Yasusi TAKEMURA
Département de Mathématiques, Université de Kōbe

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., March 12, 1968)

1. Un des auteurs a donné dans [1] la notion de la suite filtrante de nombres comme généralisation de la suite de nombres et exposé qu'elle est une technique générale dans l'analyse mathématique classique.

Nous montrons ici que quelques résultats obtenus dans [1] subsistent sous l'hypothèse plus faible.

2. Soient $R^\sharp$ l'ensemble des nombres réels et Γ un ensemble ordonné filtrant au sens de Tukey.

Nous appelons $\{a_\lambda\}$ $(a_\lambda \in R^\sharp, \lambda \in \Gamma)$ suite filtrante de nombres.

Théorème 1. *La limite supérieure et la limite inférieure d'une suite filtrante de nombres* $\{a_\lambda\}$ $(\lambda \in \Gamma)$ *sont respectivement la plus grande limite et la plus petite limite.*

Preuve. Il suffirait de prouver que $\overline{\lim}_{\lambda \in \Gamma} a_\lambda$ est la plus grande limite dans le cas où $\overline{\lim}_{\lambda \in \Gamma} a_\lambda$ est finite.

Par définition on a

$$\overline{\lim_{\lambda \in \Gamma}}\, a_\lambda \in L,$$

où L est l'ensemble des limites au sens généralisé de $\{a_\lambda\}$.

Soit l un élément quelconque mais fixé de L, on a alors l'inégalité

$$l \leqq \overline{\lim_{\lambda \in \Gamma}}\, a_\lambda.$$

Raisonner par l'absurde. Supposons que l'on ait

$$l > \overline{\lim_{\lambda \in \Gamma}}\, a_\lambda.$$

On peut prendre $\varepsilon > 0$ tel que

$$\overline{\lim_{\lambda \in \Gamma}}\, a_\lambda < l - \varepsilon.$$

l étant l'élément de L, l'ensemble Δ des éléments μ tels que $l-\varepsilon < a_\mu$ est cofinal dans Γ. On a donc

$$\overline{\lim_{\mu \in \Delta}}\, a_\mu \leqq \overline{\lim_{\lambda \in \Gamma}}\, a_\lambda.$$

D'autre part, on obtient

$$l - \varepsilon \leqq \overline{\lim_{\mu \in \Delta}}\, a_\mu.$$

Par suite, on a

$$\overline{\lim_{\lambda \in \Gamma}}\, a_\lambda < \overline{\lim_{\mu \in \Delta}}\, a_\lambda,$$

ce qui est absurde. C.Q.F.D.

Dans la suite, on suppose que toutes les limites inférieure et supérieure de suites filtrantes de nombres sont finies.

Théorème 2. *Soient* $\{a_\lambda\}$ *et* $\{b_\lambda\}$ *deux suites filtrantes de nombres. Posons* $c_\lambda = a_\lambda + b_\lambda (\lambda \in \Gamma)$. *On a alors les inégalités*

$$\begin{aligned}\varliminf_{\lambda\in\Gamma} a_\lambda + \varliminf_{\lambda\in\Gamma} b_\lambda &\leqq \varliminf_{\lambda\in\Gamma} c_\lambda \\ &\leqq \left\{\begin{matrix}\varliminf_{\lambda\in\Gamma} a_\lambda + \varlimsup_{\lambda\in\Gamma} b_\lambda \\ \varlimsup_{\lambda\in\Gamma} a_\lambda + \varliminf_{\lambda\in\Gamma} b_\lambda\end{matrix}\right\} \\ &\leqq \varlimsup_{\lambda\in\Gamma} c_\lambda \leqq \varlimsup_{\lambda\in\Gamma} a_\lambda + \varlimsup_{\lambda\in\Gamma} b_\lambda.\end{aligned}$$

Preuve. Il suffirait de prouver que l'on a l'inégalité

$$\varliminf_{\lambda\in\Gamma} c_\lambda \leqq \varliminf_{\lambda\in\Gamma} a_\lambda + \varlimsup_{\lambda\in\Gamma} b_\lambda.$$

Posons

$$\underline{\alpha} = \varliminf_{\lambda\in\Gamma} a_\lambda, \qquad \overline{\beta} = \varlimsup_{\lambda\in\Gamma} b_\lambda, \qquad \underline{\gamma} = \varliminf_{\lambda\in\Gamma} c_\lambda.$$

Alors on peut prendre Λ' et Λ'' tels que

$$\begin{aligned}&\overline{\beta} + \varepsilon > b_{\lambda'}, \qquad \lambda' \geqq \Lambda' \ (\in \Gamma),\\ &\underline{\gamma} - \varepsilon < c_{\lambda''}, \qquad \lambda'' \geqq \Lambda'' \ (\in \Gamma).\end{aligned}$$

Γ étant filtrant, il existe un élément Λ de Γ tel que

$$\Lambda' \leqq \Lambda, \qquad \Lambda'' \leqq \Lambda.$$

Par définition de $\underline{\alpha}$, on peut prendre λ tel que

$$\underline{\alpha} + \varepsilon > a_\lambda, \qquad \lambda \geqq \Lambda, \qquad \lambda \in \Gamma.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\underline{\alpha} + \overline{\beta} + 2\varepsilon &> a_\lambda + b_\lambda = c_\lambda \\ &> \underline{\gamma} - \varepsilon,\end{aligned}$$

ou

$$\underline{\alpha} + \overline{\beta} + 3\varepsilon > \underline{\gamma}.$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on a

$$\underline{\alpha} + \overline{\beta} \geqq \underline{\gamma}.$$ C.Q.F.D.

D'une même manière que la démonstration du théorème 2, on obtient le théorème suivant.

Théorème 3. *Soient* $\{a_\lambda\}$, $\{b_\lambda\}$ *deux suites filtrantes de nombres non-négatifs. Posons* $p_\lambda = a_\lambda b_\lambda$ $(\lambda \in \Gamma)$. *Alors on a les inégalités*

$$\begin{aligned}\varliminf_{\lambda\in\Gamma} a_\lambda \varliminf_{\lambda\in\Gamma} b_\lambda &\leqq \varliminf_{\lambda\in\Gamma} p_\lambda \\ &\leqq \left\{\begin{matrix}\varliminf_{\lambda\in\Gamma} a_\lambda \varlimsup_{\lambda\in\Gamma} b_\lambda \\ \varlimsup_{\lambda\in\Gamma} a_\lambda \varliminf_{\lambda\in\Gamma} b_\lambda\end{matrix}\right\} \\ &\leqq \varlimsup_{\lambda\in\Gamma} p_\lambda \leqq \varlimsup_{\lambda\in\Gamma} a_\lambda \varlimsup_{\lambda\in\Gamma} b_\lambda.\end{aligned}$$

On obtient aisèment le théorème suivant.

Théorème 4. *Soient* $a_\lambda \geqq 0, b_\lambda > 0$ $(\lambda \in \Gamma)$. *Posons* $d_\lambda = a_\lambda / b_\lambda$ $(\lambda \in \Gamma)$. *Si l'on a* $\varliminf_{\lambda \in \Gamma} b_\lambda > 0$, *on a les inégalités*

$$\begin{aligned}\varliminf_{\lambda \in \Gamma} a_\lambda \Big/ \varlimsup_{\lambda \in \Gamma} b_\lambda &\leqq \varliminf_{\lambda \in \Gamma} d_\lambda \\ &\leqq \left\{ \begin{array}{l} \varliminf_{\lambda \in \Gamma} a_\lambda \Big/ \varliminf_{\lambda \in \Gamma} b_\lambda \\ \varlimsup_{\lambda \in \Gamma} a_\lambda \Big/ \varlimsup_{\lambda \in \Gamma} b_\lambda \end{array} \right\} \\ &\leqq \varlimsup_{\lambda \in \Gamma} d_\lambda \leqq \varlimsup_{\lambda \in \Gamma} a_\lambda \Big/ \varliminf_{\lambda \in \Gamma} b_\lambda.\end{aligned}$$

Référence

[1] T. Satō: Sur l'analyse générale. V (Théorie des suites filtrantes de nombres). Annali di Mat. Pura Appl., **74** (1966).