18. *Certains espaces de fonctions à valeurs vectorielles*

Par Kôzô YABUTA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Feb. 12, 1969)

En ce qui concerne les espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles et l'espace de distributions à valeurs vectorielles, beaucoup de faits sont déjà connus (L. Schwartz [3] et [4]). L'espace de fonctions de puissance p-ème sommabls à valeurs vectorielles a été considéré relativement à la théorie de produits tensoriels topologiques (A. Grothendieck [1], L. Schwartz [5]). Dans cet article nous étudierons l'espace de fonctions carré-sommables à valeurs dans un espace vectoriel topologique séparé semi-complet E dans le cadre de la théorie des distributions à valeurs vectorielles. Et nous construirons l'espace $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ qui est un analogue naturel de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ et nous déduirons quelques propriétés de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$. Les résultats principaux sont donnés à la proposition 1 et aux théorèmes 1, 2, 3. Comme la topologie de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ est plus visible que la topologie tensorielle la moins fine sur $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)\otimes E$, il nous a paru utile de construire l'espace $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ exactement.

1. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé semi-complet. Soit $\{q_i\}_{i\in I}$ une famille de semi-normes définissant la topologie de E. Et soit Ω un ouvert de R^n. *On dit qu'une fonction $\vec{f}$, définie presque partout sur Ω à valeurs dans E, définit une distribution sur Ω à valeurs dans E, si $\vec{f}$ est scalairement localement sommable, c.à.d. si $\langle\vec{f}, e'\rangle$ est localement sommable pour tout $e'\in E'$, et si l'application linéaire $e'\to\langle\vec{f}, e'\rangle$ est continue de E'_c*[1] *dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.* Pour que 2 fonctions $\vec{f}$, $\vec{g}$, définissent la même distribution, il faut et il suffit qu'elles soient scalairement presque partout égales. Voici un résultat de M. L. Schwartz:

Lemme 1. *Pour qu'une fonction $\vec{f}$, définie p.p. sur Ω à valeurs dans E, et scalairement localement sommable, définisse une distribution à valeurs dans E, il faut et il suffit que, pour toute $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, l'intégrale faible $\int_\Omega \vec{f}(x)\varphi(x)dx$ de E'^* soit dans E.*

Introduisons l'espace $\mathcal{E}^m(\Omega, E)$; l'espace des fonctions $\vec{f}$ m fois continuement différentiables sur Ω à valeurs dans E, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω pour $\vec{f}$ et chacune de ses dérivées d'ordre$\leq m$. $\mathcal{E}^m(\Omega, E)$ est semi-complet si E

---

*) Nous utiliserons systématiquement les notations de L. Schwartz, [3] et [4].

1) E'_c est le dual de E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties convexes équilibrées compactes de E.

est semi-complet.

Introduisons ensuite l'espace $\mathcal{L}^p(\Omega, E)$ $(1 \leq p < \infty)$; l'espace de fonctions $\vec{f}(x)$ définies p.p. sur Ω à valeurs dans E, pour lesquelles chaque intégrale $\left(\int (q_i(\vec{f}(x)))^p dx\right)^{1/p} = N_{p,q_i}(\vec{f})$ est finie, et qui sont adhérentes, pour la topologie définie par la famille des semi-normes N_{p,q_i}, à l'espace de fonctions étagées à support compact. $L^p(\Omega, E)$ est le quotient de $\mathcal{L}^p(\Omega, E)$ par le sous-espace des $\vec{f}$ pour lesquelles chaque $N_{p,q_i}(\vec{f})$ est nulle.

Lemme 2. *Si 2 fonctions $\vec{f}, \vec{g} \in \mathcal{L}^p(\Omega, E)$ sont scalairement p.p. égales sur Ω, $\vec{f} = \vec{g}$ dans $L^p(\Omega, E)$ c.à.d. chaque N_{p,q_i} $(\vec{f} \to \vec{g})$ est nulle.*

Remarque. Une fonction scalairement p.p. nulle peut n'être pas dans $\mathcal{L}^p(\Omega, E)$. Exemple: E ; un espace hilbertient non-séparable engendré par une base complète orthonormale $\{e_t ; 0 < t < 1\}$. $\Omega = (0, 1)$ et $\vec{f}(t) = e_t$.

Grâce au lemme 2 on peut définir l'espace $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$. *On dit qu'une fonction $\vec{f}(x)$ est un élément de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ si $\vec{f}(x)$ définit une distribution à valeurs dans E, et si pour tout α $(|\alpha| \leq m)$, $D^\alpha \vec{f}(x) \in L^2(\Omega, E)$.* On le munit des semi-normes par $\|\vec{f}\|^2_{m,q_i} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (q_i(D^\alpha \vec{f}(x)))^2 dx$.

Remarque. Si E est complet, $\mathcal{E}^0_{L^2}(\Omega, E) = L^2(\Omega, E)$. Si E est un Fréchet, $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ est aussi un Fréchet.

Remarque. $\mathcal{E}^0_{L^1}(\Omega, E)$ peut ne s'identifier pas avec $L^1(\Omega, E)$ même si E est quasi-complet. Exemple: $E = \overline{\mathcal{K}(N)}$; l'espace des suites de nombres réels tendant vers 0, muni de la topologie faible, $\Omega = (-\infty, \infty)$, $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $\varphi_{I_n}(t)$; la fonction caractéristique de I_n, $\vec{f}(t) = (n\varphi_{I_n})$. En effet, manifestement on a $\vec{f}(t) \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$, mais $\int \vec{f}(t) dt = (1) \notin E$. Donc $\vec{f}(t)$ ne définit pas une distribution à valeurs dans E.

Nous allons étudier quelques propriétés de l'espace $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$.

Lemme 3. *Si $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^0_{L^2}(\Omega, E)$, l'intégrale faible $\int \vec{f}(x) g(x) dx$ est un élément de E pour toute fonction $g(x) \in L^2(\Omega)$.*

Grâce à ce lemme, si une base complète orthonormale $\{\varphi_i(x) \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)\}_{i=1,2,\ldots}$ de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ est donnée, on peut définir des coefficients de Fourier de $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ par la formule suivante

$$\vec{b}_i = (\vec{f}(x), \varphi_i(x))_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int D^\alpha \vec{f}(x) \overline{D^\alpha \varphi_i(x)}\, dx.$$

Rappelons ensuite que si $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$, on a $\langle \vec{f}, e' \rangle \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ pour tout $e' \in E'$ par définition. Donc on a immédiatement $\langle (\vec{f}, \varphi_i)_m, e' \rangle = (\langle \vec{f}, e' \rangle, \varphi_i)_m$ pour tout $e' \in E'$.

Enonçons des résultats,

Proposition 1. *Soit A une partie équicontinue de E'. Alors, $\sum_{i=1}^{k}\langle(\vec{f},\varphi_i)_m, e'\rangle\varphi_i(x)$ tend vers $\langle\vec{f}(x), e'\rangle$ (avec la topologie de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$) uniformément quand e' parcourt l'ensemble A lorsque k tend vers à l'infini.*

Démonstration. On peut supposer que A est faiblement fermée, donc que A est faiblement compacte.

Posons

$$\rho_k(e')=\|\langle\vec{f}(x), e'\rangle-\sum_{i=1}^{k}\langle(\vec{f},\varphi_i)_m, e'\rangle\varphi_i(x)\|^2_m,$$

et

$$\eta_k(e')=\|\langle\vec{f}(x), e'\rangle\|^2_m-\rho_k(e')=\sum_{i=1}^{k}|(\langle\vec{f}, e'\rangle,\varphi_i)_m|^2.$$

$\eta_k(e')$ est faiblement continue sur A d'après le lemme 3, et $\eta_k(e')$ tend monotonement vers $\|\langle\vec{f}, e'\rangle\|^2_m$. D'après le lemme 4 suivant, $\|\langle\vec{f}, e'\rangle\|^2_m$ est faiblement continue sur A, donc en vertu du théorème de Dini, $\eta_k(e')$ tend vers $\|\langle\vec{f}, e'\rangle\|^2_m$ uniformément sur A, c.à.d. $\rho_k(e')$ tend vers zéro uniformément sur A, *cqfd.*

Théorème 1. *Soit Ω un ouvert de R^n auquel soit applicable le lemme de Sobolev. Soit G un opérateur linéaire continu de $\mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ $\left(m\geq\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$. Alors si $\{\varphi_i(x)\in\mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega)\}_{i=1,2,\dots}$ est une base complète orthonormale de $\mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega)$, l'application $\tilde{G}$ définie par la formule suivante définit une application linéaire continue de $\mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega, E)$ dans $\mathcal{E}^{m-[\frac{n}{2}]-1}(\bar{\Omega}, E)$,*

$$\tilde{G}\vec{f}=\sum_i(\vec{f},\varphi_i)_s(G\varphi_i)\qquad(\vec{f}(x)\in\mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega, E)).$$

Démonstration. Comme G est une application linéaire continue de $\mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, il existe $C>0$ telle que $\|Gu\|_m\leq C\|u\|_s$ $(u\in\mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega))$. Posons $\vec{b}_i=(\vec{f},\varphi_i)_s$. Alors d'après le lemme de Sobolev les $\vec{b}_i(G\varphi_i)(x)$ appartiennent à $\mathcal{E}^p(\bar{\Omega}, E)$ $\left(p=m-\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)$. Soient q une semi-norme continue quelconque de E et $V=\{e\in E;\ q(e)\leq 1\}$, et $V^0=\{e'\in E';\ |\langle e, e'\rangle|\leq 1$, pour tout $e\in V\}$. Alors, en appliquant le lemme de Sobolev on a

$$\sum_{|\alpha|\leq p}\sup_{x\in\Omega}q(D^\alpha(\sum_{i=k}^{l}\vec{b}_i(G\varphi_i)(x)))\leq C\sup_{e'\in V^0}\|\sum_{i=k}^{l}\langle\vec{b}_i, e'\rangle\varphi_i(x)\|_s.$$

Comme V^0 est un ensemble équicontinu, en appliquant la proposition 1 on voit que le dernier membre tend vers zéro lorsque k et l tendent vers à l'infini. Donc $\{\sum_{i=1}^{k}\vec{b}_i(G\varphi_i)(x)\}_{k=1,2,\dots}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{E}^p(\bar{\Omega}, E)$. On peut donc définir une application linéaire $\tilde{G}:\mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega, E)\to\mathcal{E}^p(\bar{\Omega}, E)$ par $\tilde{G}f=\sum_{i=1}^{\infty}\vec{b}_i(G\varphi_i)$,puisque $\mathcal{E}^p(\Omega, E)$ est semi-complet. On voit immédiatement que $\tilde{G}$ est continue, cqfd.

Corollaire 1 (Un analogue du lemme de Sobolev). *Soit Ω un ouvert de R^n auquel soit applicable le lemme de Sobolev. Si $m \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, l'application $\tilde{I}$; $\vec{f}(x) \to \sum_{i=1}^{\infty} (\vec{f}, \varphi_i)_m \varphi_i(x)$ est une immersion linéaire continue de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ dans $\mathcal{E}^{m-[\frac{n}{2}]-1}(\bar{\Omega}, E)$.*

Nous donnons ensuite le lemme que nous avons utilisé pour prouver la proposition 1.

Lemme 4. *Soient $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^0_{L^2}(\Omega, E)$, et A une partie équicontinue de E'. Alors $\rho(e') = \int_\Omega |\langle \vec{f}(x), e' \rangle|^2 dx$ est une fonction continue sur A pour la topologie faible de E'.*

Démonstration. Comme A est équicontinue, il existe un voisinage V de zéro dans E tel que $\sup_{e \in V, e' \in A} |\langle e, e' \rangle| \leq 1$. Donc A est un sous-ensemble de V^0 où V^0 est l'ensemble polaire de V. Soit q la semi-norme définie par V, et soient e'_0, e' des éléments de A. Par définition, étant donné $\varepsilon > 0$ arbitraire, il existe une fonction $\vec{g}(x)$ étagée à support compact telle que $\int (q(\vec{f}(x) - \vec{g}(x)))^2 dx \leq \varepsilon^2$. Par calcul élémentaire on a

$$|\rho(e'_0) - \rho(e')| \leq 2\int q(\vec{f}(x) - \vec{g}(x))(q(\vec{f}(x)) + q(\vec{g}(x)))dx$$
$$+ 2\int q(\vec{g}(x)) |\langle \vec{g}(x), e'_0 - e' \rangle| dx.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\rho(e'_0) - \rho(e')| \leq 2\left(\int (q(\vec{f}(x) - \vec{g}(x)))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (q(\vec{f}(x)) + q(\vec{g}(x)))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ 2\left(\int (q(\vec{g}(x)))^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\langle \vec{g}(x), e'_0 - e' \rangle|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq 2C\varepsilon + 2C\left(\int |\langle \vec{g}(x), e'_0 - e' \rangle|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

où $C^2 = 4\int (q(\vec{f}(x)))^2 dx + 1$. $\vec{g}(x)$ étant une fonction étagée à support compact, le dernier membre est inférieur à ε, si e' appartient à un voisinage de e'_0 dans E'_s (dual faible de E), déterminé convenablement par $\vec{g}(x)$, cq*fd*.

2. Cas où E est quasi-complet (ou complet).

La topologie tensorielle la moins fine sur un produit tensoriel $F \otimes G$ de deux espaces localement convexes F et G est celle de la convergence uniforme sur les produits $K' \times H'$ de parties équicontinues K' et H' de F' et G'. Nous l'appellerons topologie ε et noterons $F \otimes_\varepsilon G$ l'espace $F \otimes G$ muni de cette topologie, $F \widehat{\otimes}_\varepsilon G$ le quasi-complété de $F \otimes_\varepsilon G$, et $F \widehat{\otimes}_\varepsilon G$ le complété de $F \otimes_\varepsilon G$.

La proposition 1 implique que si $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ $\sum_{i=1}^{k} (\vec{f}, \varphi_i)_m \varphi_i(x)$

tend vers $\vec{f}(x)$ avec la topologie ε quand k tend vers à l'infini. Donc on peut regarder $\vec{f}(x)$ comme un élément de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)\widehat{\otimes}_\varepsilon E$. En remarquant que la topologie sur $\mathcal{E}^m_{L^2}\otimes E$ induite par $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ est plus fine (strictement plus fine si la dimension de E est infinie) que celle de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)\otimes_\varepsilon E$, on a le

Théorème 2. *Si E est quasi-complet, $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ est un sous-espace de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)\widehat{\otimes}_\varepsilon E$* et l'immersion est continue.

Remarpue. $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ étant un espace hilbertien séparable, si E est complet, $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)\widehat{\otimes}_\varepsilon E$ coïncide avec $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)\hat{\otimes}_\varepsilon E$.

En général, soit $\{h_i\}_{i=1,2,\ldots}$ une base complète orthonormale d'un espace hilbertien séparable H, et soit (,) le produit scalaire de H. En appliquant le raisonnement de la démonstration de la proposition 1, on a le

Théorème 3. *Si E est quasi-complet (resp. complet), tout élément de $H\widehat{\otimes}_\varepsilon E$ (resp. $H\hat{\otimes}_\varepsilon E$) est la somme d'une série convergente de la forme*

$$f=\sum_i (f, h_i)\otimes h_i.$$

Remarquons que si E est quasi-complet (resp. complet) $\mathcal{E}^m(\Omega, E)$ s'identifie à $\mathcal{E}^m(\Omega)\widehat{\otimes}_\varepsilon E$ (resp. $\mathcal{E}^m(\Omega)\hat{\otimes}_\varepsilon E$). Donc si E est quasi-complet, le théorème 1 est une conséquence des théorèmes 2 et 3.

Finalement nous remercions Monsieur Sigeru Mizohata pour ses conseils et ses critiques.

Références

[1] A. Grothendieck: Produits tensoriels topologiques et espaces mucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. n^0, **16** (1955).

[2] ——: Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires. Ann. Inst. Fourier, **4**, 73–112 (1952).

[3] L. Schwartz: Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles. Journal d'Analyse Math., **4**, 88–143 (1954–55).

[4] ——: Théorie des distributions à valeurs vectorielles tome 1. Ann. Inst. Fourier, **7**, 1–141 (1957).

[5] ——: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Séminaire Schwartz (1953–54).