106. *Tauber-Konstanten für die Verfahren C_α, A_λ und L. II*

Von Hubert TIETZ
Mathematisches Institut, Universität Stuttgart, Deutschland

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., June 10, 1969)

3. Tauber-Konstanten für A_λ. Dem Analogon zu Satz C_α für das Verfahren A_λ stellen wir folgenden Hilfssatz voran.

Hilfssatz 2. a) *Für $\lambda>-1$ und $\nu=1,2,\cdots$ ist*

$$\binom{\nu+\lambda}{\nu-1}\leq M(\lambda)\nu^{\lambda+1} \quad \textit{mit} \quad M(\lambda)=\begin{cases}1/\Gamma(\lambda+2) & \textit{für} \ -1<\lambda<0\\ 1 & \textit{für} \ \lambda\geq 0.\end{cases} \tag{3.1}$$

b) *Für $\lambda>-1$, $x\geq 1$ und $k\geq[(\lambda+3)x]$ ist*

$$(1+x)^{-\lambda-1}\binom{k+\lambda}{k}\leq(1+x)^{-\Lambda-1}\binom{k+\Lambda}{k}, \tag{3.2}$$

wenn Λ die kleinste ganze Zahl mit $\lambda\leq\Lambda$ bezeichnet.

c) *Für festes $\Lambda=0,1,\cdots$ und festes $\nu=0,1,\cdots$ läßt sich die Funktion*

$$g_{\Lambda\nu}(t)=\sum_{k=\nu}^{\infty}\binom{k+\Lambda}{k}t^k \quad \textit{für} \ t\in(0,1)$$

darstellen in der Form

$$g_{\Lambda\nu}(t)=\sum_{\mu=0}^{\Lambda}\binom{\nu+\Lambda}{\nu+\mu}t^{\nu+\mu}(1-t)^{-1-\mu}. \tag{3.3}$$

Beweis. a) Für $-1<\lambda<0$ ist (siehe Wendel [10],*) Ungleichung (4))

$$\Gamma(\nu+\lambda+1)\leq\nu^{\lambda+1}\Gamma(\nu) \quad \text{für} \ \nu=1,2,\cdots$$

und damit

$$\binom{\nu+\lambda}{\nu-1}=\frac{\Gamma(\nu+\lambda+1)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\lambda+2)}\leq\frac{\nu^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+2)}.$$

Für $\lambda\geq 0$ und $\nu=1$ gilt (3.1) mit $M(\lambda)\equiv 1$. Es sei (3.1) im Fall $\lambda\geq 0$ für $\nu=1,2,\cdots,k-1$ mit $M(\lambda)\equiv 1$ bewiesen. Dann ist für $\nu=k$

$$\binom{k+\lambda}{k-1}=\frac{k+\lambda}{k-1}\binom{k-1+\lambda}{k-2}\leq\frac{k+\lambda}{k-1}(k-1)^{\lambda+1}=\frac{k+\lambda}{k}\,\frac{(k-1)^\lambda}{k^\lambda}k^{\lambda+1}\leq k^{\lambda+1},$$

denn $\frac{k+\lambda}{k}\left(\frac{k-1}{k}\right)^\lambda$ fällt monoton mit wachsendem λ. Also gilb (3.1) auch für $\lambda\geq 0$.

b) Mit $f(\lambda)=(1+x)^{-\lambda-1}\binom{k+\lambda}{k}$ erhalten wir

$$f'(\lambda)=\frac{\Gamma(k+\lambda+1)}{(1+x)^{1+\lambda}\Gamma(k+1)\Gamma(\lambda+1)}[\psi(k+\lambda+1)-\psi(\lambda+1)-\log(1+x)].$$

*) Vgl. die Literatur am Ende der ersten Arbeit.

Also ist genau dann $f'(\lambda)\geq 0$, wenn $\psi(k+\lambda+1)-\psi(\lambda+1)\geq\log(1+x)$ ist. Wegen $\psi(k+\lambda+1)-\psi(\lambda+1)\geq\log(k+\lambda)-\log(\lambda+1)$ ist das sicher der Fall für $k\geq(\lambda+2)x$.

c) Für $t\in(0,1)$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+\nu+\Lambda}{k+\nu}t^{k+\nu}=\frac{1}{\Lambda!}\frac{d^{\Lambda}}{dt^{\Lambda}}\sum_{k=0}^{\infty}t^{k+\nu+\Lambda}$$

und somit

$$g_{\Lambda\nu}(t)=\frac{1}{\Lambda!}\frac{d^{\Lambda}}{dt^{\Lambda}}\left(\frac{t^{\nu+\Lambda}}{1-t}\right)\quad\text{für } \Lambda=0,1,\cdots. \tag{3.4}$$

Setzen wir bei festem $\Lambda=0,1,\cdots$ und festem $\nu=0,1,\cdots$

$$f_1(t)=t^{\nu+\Lambda},\quad f_2(t)=\frac{1}{1-t}\quad\text{für } t\in(0,1), \tag{3.5}$$

so ist

$$\begin{aligned} f_1^{(\mu)}(t)&=(\nu+\Lambda)\cdots(\nu+\Lambda-\mu+1)t^{\nu+\Lambda-\mu}\quad\text{für } 1\leq\mu\leq\Lambda,\\ f_2^{(\mu)}(t)&=\frac{\mu!}{(1-t)^{\mu+1}}\quad\text{für } 1\leq\mu\leq\Lambda. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Mit (3.5) und (3.6) ergibt sich aus (3.4)

$$\begin{aligned} g_{\Lambda\nu}(t)&=\frac{1}{\Lambda!}\frac{d^{\Lambda}}{dt^{\Lambda}}(f_1\cdot f_2)=\frac{1}{\Lambda!}\sum_{\mu=0}^{\Lambda}\binom{\Lambda}{\mu}f_1^{(\Lambda-\mu)}f_2^{(\mu)}\\ &=\sum_{\mu=0}^{\Lambda}\frac{1}{\mu!(\Lambda-\mu)!}\frac{(\nu+\Lambda)!}{(\nu+\mu)!}t^{\nu+\mu}\frac{\mu!}{(1-t)^{\mu+1}}\\ &=\sum_{\mu=0}^{\Lambda}\binom{\nu+\Lambda}{\nu+\mu}t^{\nu+\mu}(1-t)^{-1-\mu}. \end{aligned}$$

Satz A_λ. *Ist $\{\psi_\nu\}$ $(\nu=0,1,\cdots)$ eine gegen ∞ strebende Zahlenfolge mit $\psi_\nu>0$ für $\nu\geq\nu_0>1$ und*

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_\nu}=\infty, \tag{3.7}$$

gilt ferner–mit einer festen Funktion $x=x(n)\geq n+1$–

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{\nu=n+1}^{[x]}\frac{1}{\nu\psi_\nu}=q\quad\textit{für ein endliches } q\geq 0, \tag{3.8}$$

so ist für jede Folge (1.1) *mit*

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\,\nu\psi_\nu|a_\nu|=K \tag{3.9}$$

(K eine endliche Konstante) die Ungleichung

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|s_n-A_\lambda(x)|\leq qK \tag{3.10}$$

erfüllt. Außerdem gibt es eine reelle Folge mit (3.9), *für die in* (3.10) *das Gleichheitszeichen gilt.*

Beweis. Mit

$$Q_{xk}(\lambda)=(1+x)^{-\lambda-1}\binom{k+\lambda}{k}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{k}\quad\text{für } x>0,\ k=0,1,\cdots,\lambda>-1$$

ist nach (1.3)

$$s_n - A_\lambda(x) = s_n - \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_{x\nu}(\lambda) \sum_{k=0}^{\nu} a_k = s_n - \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=\nu}^{\infty} Q_{xk}(\lambda) a_\nu$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left[1 - \sum_{k=\nu}^{\infty} Q_{xk}(\lambda)\right] a_\nu - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{k=\nu}^{\infty} Q_{xk}(\lambda) a_\nu,$$

also für $n \geq \nu_0$

$$s_n - A_\lambda(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0-1} \left[1 - \sum_{k=\nu}^{\infty} Q_{xk}(\lambda)\right] a_\nu + \sum_{\nu=\nu_0}^{n} \frac{1}{\nu\psi_\nu} \left[1 - \sum_{k=\nu}^{\infty} Q_{xk}(\lambda)\right] \nu\psi_\nu a_\nu$$
$$- \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_\nu} \sum_{k=\nu}^{\infty} Q_{xk}(\lambda) \nu\psi_\nu a_\nu,$$

wegen

$$(3.11) \qquad 1 - \sum_{k=\nu}^{\infty} Q_{xk}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\nu-1} Q_{xk}(\lambda) = \underset{n\to\infty}{o(1)} \quad \text{für jedes feste } \nu = 1, 2, \cdots,$$

also

$$s_n - A_\lambda(x) = \underset{n\to 1}{o(1)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(x) \nu\psi_\nu a_\nu$$

mit

$$c_\nu(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ für } 1 \leq \nu < \nu_0 \\ \dfrac{1}{\nu\psi_\nu} \displaystyle\sum_{k=0}^{\nu-1} Q_{xk}(\lambda) \quad \text{für } \nu_0 \leq \nu \leq n \\ -\dfrac{1}{\nu\psi_\nu} \displaystyle\sum_{k=\nu}^{\infty} Q_{xk}(\lambda) \quad \text{für } \nu > n. \end{cases}$$

Wegen (3.9) und (3.11) haben wir, nach dem schon erwähnten Satz von Agnew, nur noch zu zeigen:

$$(3.12) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu(x)| = q.$$

Da alle $Q_{xk}(\lambda) \geq 0$ sind, erhalten wir

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu(x)| = \sum_{\nu=\nu_0}^{n} \frac{1}{\nu\psi_\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} Q_{xk}(\lambda) + \sum_{\nu=n+1}^{[x]} \frac{1}{\nu\psi_\nu} - \sum_{\nu=n+1}^{[x]} \frac{1}{\nu\psi_\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} Q_{xk}(\lambda)$$
$$+ \sum_{\nu=[x]+1}^{[(\lambda+3)x]-1} \frac{1}{\nu\psi_\nu} \sum_{k=\nu}^{\infty} Q_{xk}(\lambda) + \sum_{\nu=[(\lambda+3)x]}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_\nu} \sum_{k=\nu}^{\infty} Q_{xk}(\lambda)$$
$$= S_1 + S_2 - S_3 + S_4 + S_5,$$

mit $S_r \geq 0$ für $r = 1, \cdots, 5$. Es ist

$$S_1 + S_3 \leq (1+x)^{-\lambda-1} \sum_{\nu=\nu_0}^{[x]} \frac{1}{\nu\psi_\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} \binom{k+\lambda}{k} = (1+x)^{-\lambda-1} \sum_{\nu=\nu_0}^{[x]} \frac{1}{\nu\psi_\nu} \binom{\nu+\lambda}{\nu-1},$$

also nach (3.1)

$$S_1 + S_3 \leq (1+x)^{-\lambda-1} M(\lambda) \sum_{\nu=\nu_0}^{[x]} \frac{\nu^\lambda}{\psi_\nu} \leq \frac{M(\lambda)}{x} \sum_{\nu=\nu_0}^{[x]} \frac{1}{\psi_\nu} = o(1) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Wegen Voraussetzung (3.8) ist $\overline{\lim}_{n\to\infty} S_2 = q$. Ferner gilt

$$S_4 \leq \sum_{\nu=[x]+1}^{[(\lambda+3)x]} \frac{1}{\nu\psi_\nu} = \underset{n\to\infty}{o(1)} \sum_{\nu=[x]+1}^{[(\lambda+3)x]} \frac{1}{\nu} = o(1) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Um noch $S_5 = o(1)$ für $n \to \infty$ zu zeigen, genügt es nach (3.2)

$$(3.13) \qquad \sum_{\nu=[(\lambda+3)x]}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_\nu} \sum_{k=\nu}^{\infty} Q_{xk}(\Lambda) = o(1) \quad \text{für } n \to \infty$$

und jedes feste $\Lambda=0, 1, \cdots$ nachzuweisen. Wegen Hilfssatz 2. c) –mit $t=1-\dfrac{1}{1+x}$– folgt (3.13) aus

$$\sum_{\nu=[(\lambda+3)x]}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_\nu}(1+x)^{-\Lambda-1}\binom{\nu+\Lambda}{\nu+\mu}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{\nu+\mu}(1+x)^{1+\mu}=o(1) \tag{3.14}$$

für $n\to\infty$ und jedes feste $\mu=0, 1, \cdots, \Lambda$. Nun ist

$$\binom{\nu+\Lambda}{\nu+\mu}=\binom{\nu+\Lambda}{\Lambda-\mu}\leq(\nu+\Lambda)^{\Lambda-\mu}=\nu^{\Lambda-\mu}[1+o(1)] \quad \text{für } \nu\to\infty,$$

also, bei hinreichend großem n, die linke Seite von (3.14) kleiner als

$$\begin{aligned}
2(1+x)^{\mu-\Lambda} &\sum_{\nu=[(\lambda+3)x]}^{\infty} \frac{1}{\psi_\nu}\nu^{\Lambda-\mu-1}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{\nu} \\
&\leq \underset{n\to\infty}{o(1)}(1+x)^{\mu-\Lambda}\sum_{\nu=[(\lambda+3)x]}^{\infty}\nu^{\Lambda-\mu-1}e^{-\frac{\nu}{1+x}} \\
&= \underset{n\to\infty}{o(1)}(1+x)^{\mu-\Lambda}\int_{1+x}^{\infty} v^{\Lambda-\mu-1}e^{-\frac{v}{1+x}}dv \\
&= \underset{n\to\infty}{o(1)}\int_{1}^{\infty} w^{\Lambda-\mu-1}e^{-w}dw \qquad \left[w=\frac{v}{1+x}\right] \\
&= o(1) \quad \text{für } n\to\infty.
\end{aligned}$$

Fassen wir die verschiedenen Abschätzungen für die S_r $(r=1, \cdots, 5)$ zusammen, so ergibt sich (3.12).

Aus Satz A_λ folgt, ähnlich wie in Nr. 2,

Korollar A_λ. *Ist $\{\psi_\nu\}$ eine Folge wie in Satz A_λ und genügt die Folge* (1.1) *der Bedingung* (3.9), *so ist die Menge der Häufungspunkte der Folge* (1.1) *gleich der Menge der Häufungspunkte ihrer A_λ-Transformierten $A_\lambda(x)$.*

Auch das am Ende von Nr. 2 angegebene Beispiel läßt sich auf die A_λ-Verfahren anwenden. Dabei kann man die Kopplungsbedingung (3.8) in der Form

$$\frac{1}{1-p}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,[\log_r^{1-p}x(n)-\log_r^{1-p}n]=q \tag{3.15}$$

schreiben.

4. **Tauber-Konstanten für L.** Den Sätzen C_α und A_λ entspricht für das Verfahren L

Sats L. *Ist $\{\psi_\nu\}$ $(\nu=0, 1, \cdots)$ eine gegen ∞ strebende Zahlenfolge mit $\psi_\nu>0$ für $\nu\geq\nu_0>1$ und*

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty}\frac{1}{\nu\psi_\nu\log\nu}=\infty, \tag{4.1}$$

gilt ferner–mit einer festen Funktion $x=x(n)\geq n+1$–

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{\nu=n+1}^{[x]}\frac{1}{\nu\psi_\nu\log\nu}=q \quad \textit{für ein endliches } q\geq 0, \tag{4.2}$$

so ist für jede Folge (1.1) *mit*

(4.3) $$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \nu\psi_\nu \log \nu\, |a_\nu| = K$$

(K eine endliche Konstante) die Ungleichung

(4.4) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |s_n - L(x)| \leq qK$$

erfüllt. Außerdem gibt es eine reelle Folge mit (4.3), *für die in* (4.4) *das Gleichheitszeichen gilt.*

Beweis. Mit der Abkürzung

$$R_{xk} = \frac{1}{(k+1)\log(1+x)}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^{k+1} \quad \text{für } x>0,\, k=0,1,\cdots$$

ist nach (1.4)

$$\begin{aligned} s_n - L(x) &= s_n - \sum_{\nu=0}^{\infty} R_{x\nu} \sum_{k=0}^{\nu} a_k = s_n - \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=\nu}^{\infty} R_{xk} a_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \left[1 - \sum_{k=\nu}^{\infty} R_{xk}\right] a_\nu - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{k=\nu}^{\infty} R_{xk} a_\nu, \end{aligned}$$

also für $n \geq \nu_0$, unter Beachtung von

(4.5) $$1 - \sum_{k=\nu}^{\infty} R_{xk} = \sum_{k=0}^{\nu-1} R_{xk} \underset{n\to\infty}{=} o(1) \quad \text{für jedes feste } \nu=1,2,\cdots,$$

$$s_n - L(x) \underset{n\to\infty}{=} o(1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu(x) \nu\psi_\nu \log \nu a_\nu$$

mit

$$d_\nu(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } 1 \leq \nu < \nu_0 \\ \dfrac{1}{\nu\psi_\nu \log \nu} \displaystyle\sum_{k=0}^{\nu-1} R_{xk} \quad \text{für } \nu_0 \leq \nu \leq n \\ -\dfrac{1}{\nu\psi_\nu \log \nu} \displaystyle\sum_{k=\nu}^{\infty} R_{xk} \quad \text{für } \nu > n. \end{cases}$$

Wegen (4.3) und (4.5) bleibt–wie bei A_λ–nach dem Satz von Agnew noch zu zeigen, daß

(4.6) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=1}^{\infty} |d_\nu(x)| = q$$

ist. Da alle $R_{xk} \geq 0$ sind, erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} |d_\nu(x)| &= \sum_{\nu=\nu_0}^{n} \frac{1}{\nu\psi_\nu \log\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} R_{xk} + \sum_{\nu=n+1}^{[x]} \frac{1}{\nu\psi_\nu \log \nu} \\ &\quad - \sum_{\nu=n+1}^{[x]} \frac{1}{\nu\psi_\nu \log\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} R_{xk} + \sum_{\nu=[x]+1}^{\infty} \frac{1}{\nu\psi_\nu \log\nu} \sum_{k=\nu}^{\infty} R_{xk} \\ &= S_1 + S_2 - S_3 + S_4, \end{aligned}$$

mit $S_r \geq 0$ für $r=1,\cdots,4$. Zunächst ist

$$\begin{aligned} S_1 + S_3 &\leq \frac{1}{\log(1+x)} \sum_{\nu=\nu_0}^{[x]} \frac{1}{\nu\psi_\nu \log\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{1}{k+1} \underset{n\to\infty}{=} o(1) + \frac{1}{\log(1+x)} \sum_{\nu=\nu_0}^{[x]} \frac{1}{\nu\psi_\nu} \\ &= o(1) \quad \text{für } n \to \infty, \end{aligned}$$

da $\psi_\nu \to \infty$ strebt für $\nu \to \infty$ und die "Matrix" mit dem allgemeinen. Element

$$a_\nu(x) = \frac{1}{\nu \log(1+x)} \quad (x>0,\, 1<\nu_0 \leq \nu \leq [x])$$

permanent für Nullfolgen ist. Nach (4.2) ist $\overline{\lim}_{n\to\infty} S_2 = q$. Schließlich erhalten wir noch

$$S_4 \leq \frac{1}{\log(1+x)} \sum_{\nu=[x]+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \psi_\nu \log \nu} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^k$$
$$\leq \frac{1+x}{\log(1+x)} \sum_{\nu=[x]+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \psi_\nu} = o(1) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Damit ist (4.6) bewiesen.

Genau so wie für C_α und A_λ erhält man jetzt

Korollar L. *Ist* $\{\psi_\nu\}$ *eine Folge wie in Satz L und genügt die Folge* (1.1) *der Bedingung* (4.3), *so ist die Menge der Häufungspunkte der Folge* (1.1) *gleich der Menge der Häufungspunkte ihrer L-Transformierten* $L(x)$.

Mit (2.9) erhalten wir ein Beispiel für Satz L, wenn wir

$$\nu \psi_\nu \log \nu = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \nu < \nu(r) \\ \mathrm{l}_r^p(\nu) & \text{für } \nu \geq \nu(r) \end{cases}$$

–mit $r+p>2$–setzen. Dabei läßt sich die Kopplungsbedingung (4.2) in der Gestalt (3.15) schreiben.