200. *Noyaux de convolution en partie finie opérant sur les fonctions höldériennes*

Par Yoshifusa ITO
Département de Physiologie, Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Dec. 12, 1969)

1. Introduction. On employera les notations dans [1] et [2].

On définira, d'abord, l'opérateur de convolution associé en partie finie à un noyau k tel que $r^{n+\eta}|k(r\theta)|<M$ dans un voisinage de l'origine, et notera $\hat{k}f$ la convolution opérant sur une fonction f. Cette opérateur applique $C_k^{0,\lambda}(R^n)$ dans $C^0(R^n)$ si $\lambda-\eta>0$.

Ensuite, on définira une classe $M^{0,\eta,\mu}$ des noyaux, qui contient une classe $N^{0,\eta,\mu}$ définie dans [2]. L'opérateur de convolution associé en partie finie à un noyau de classe $M^{0,\eta,\mu}$ applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p,\lambda-\eta}(R^n)$ si $0<\lambda-\eta<\mu\leqslant 1$. Si $k\in N^{0,\eta,\mu}$ et $f\in C_K^{p,\lambda}(R^n)(\lambda-\eta>0)$, $\hat{k}f=\tilde{k}f-q(k)f$, où $q(k)$ est une constante dépendante du noyau k.

Finalement, on définira une classe $M^{m,\eta,\mu}(m\geqslant 1$ entier) de noyaux. Un noyau h de classe $M^{m,\eta,\mu}$ est, par définition, un noyau dont les dérivées partielles d'ordre $p(1\leqslant p\leqslant m)$ sont dans $M^{0,\eta,\mu}$. L'opérateur de convolution associé à un noyau de classe $M^{m,\eta,\mu}$ applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p+m,\lambda-\eta}(R^n)$ si $0<\lambda-\eta<\mu\leqslant 1$.

Comme application, l'opérateur de convolution associé au noyau du potentiel d'ordre $\alpha(m-1<\alpha\leqslant m, m\geqslant 1$ entier) applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p+m,\lambda-\alpha+m}(R^n)$.

2. Noyau de classe $M^{0,\eta}$. Un noyau k de classe $M^{0,\eta}(0\leqslant\eta<1)$ est, par définition, une fonction mesurable finie dans $R^n-\{0\}$ et satisfaisante aux conditions suivantes a) et b).

a) Il existe deux nombres positifs R et M tels que
$$\sup_{0<|z|\leqslant R}|z|^{n+\eta}|k(z)|<M.$$

b) $k(z)$ est borné dans $\{|z|>R\}$.

On définit, pour $\varepsilon(0<\varepsilon<R)$,
$$\hat{k}_{R,\varepsilon}f(x)=\int_{\varepsilon<|z|\leqslant R}k(z)[f(x-z)-f(x)]dz+\int_{R>|z|}k(z)f(x-z)dz.$$

On trouve une proposition suivante.

Proposition. *Soient $k\in M^{0,\eta}$ et $0\leqslant\eta<\lambda\leqslant 1$. Alors, quelle que soit $f\in C_K^{0,\lambda}(R^n)$, $\hat{k}_{R,\varepsilon}f(x)$ converge uniformément en $x\in R^n$ lorsque ε tend vers 0. D'où la limite est une fonction continue et bornée dans R^n.*

À un noyau de classe $M^{0,\eta}$, on associe une application linéaire $\hat{k}_R$ de $C_k^{0,\lambda}(R^n)(\lambda-\eta>0)$ dans $C^0(R^n)$, en posant,

$$\widehat{k}_R f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{k}_{R,\varepsilon}f(x).$$[1]

Si l'on pose, pour chaque $f\in C_k^\infty(R^n)$,

$$Pf_R k*f=kf(0),$$

on définit une distribution $Pf_R k$ sur R^n appelée la distribution partie finie de k relativement à R. On a[2]

$$Pf_R k*f=\widehat{k}_R f \qquad \text{pour toute } f\in C_K^{0,\lambda}(R^n)(\lambda-\eta>0).$$

3. Noyau de classe $M^{0,\eta,\mu}$. On fixera le nombre positif R, et notera $\widehat{k}$ et Pf en remplacement de $\widehat{k}_R$ et Pf_R respectivement.

On appellera un noyau de classe $M^{0,\eta,\mu}$ un noyau k de la classe $M^{0,\eta}$ satisfaisant à la condition suivante c).

c) $|z|^{n+\eta+\mu}k(z)\in C^{0,\mu}(0<|z|\leqslant R)$.

Pour $k\in M^{0,\eta,\mu}$, on définit

$$\|k\|^{(1)}=\sup_{0<|z|\leqslant R}|z|^{n+\eta}|k(z)|,\qquad \|k\|^{(2)}=\sup_{R<|z|}|k(z)|,$$

$$\|k\|^{(3)}=\sup_{\substack{0<|z'|\leqslant R,0<|z|\leqslant R\\ z'\neq z}}\frac{\big||z'|^{n+\eta+\mu}k(z')-|z|^{n+\eta+\mu}k(z)\big|}{|z'-z|^{\mu}}$$

et

$$\|k\|=\|k\|^{(1)}+\|k\|^{(2)}+\|k\|^{(3)}.$$

On a le théorème suivant qui majore le norme de $\widehat{k}f$.

Théorème 1.[3] *Soient $k\in M^{0,\eta,\mu}$ et λ un nombre tel que $\lambda\leqslant 1$, $0<\lambda-\eta<\mu\leqslant 1$. Alors, quelle que soit $f\in C_K^{0,\lambda}(R^n)$;*

1) *il existe une constante positive C_1 dépendante de $K,R,\lambda-\eta$ et μ telle que*

$$[\widehat{k}f]_{0,\lambda-\eta}\leqslant C_1\|k\|[f]_{0,\lambda},$$

2) *il existe une constante positive C dépendante de $K,R,\lambda-\eta$ et μ telle que*

$$\|kf\|_{0,\lambda-\eta}\leqslant C\|k\|\,\|f\|_{0,\lambda}.$$

On trouve le théorème suivant correspondant au théorème II dans [2].

Théorème 2.[4] *Soient $k\in M^{0,\eta,\mu}$ et λ un nombre tel que $\lambda\leqslant 1$ et $0<\lambda-\eta<\mu\leqslant 1$. Alors, l'opérateur de convolution associé en partie finie à k applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p,\lambda-\eta}(R^n)$; et on a, pour chaque $f\in C_K^{p,\lambda}(R^n)$ $(0<|\beta|\leqslant p)$,*

$$D^\beta(\widehat{k}f)=\widehat{k}(D^\beta f).$$

4. Noyau de classe $M^{m,\eta,\mu}$. Un noyau de classe $M^{m,\eta,\mu}$ est, par définition, un noyau h tel que $D^\beta h(0<|\beta|\leqslant m,\ m\geqslant 1$ entier) appartient à la classe $M^{0,\eta,\mu}$. On connaît les conditions suffisantes pour que un

1) Si $k\in M^{0,\eta}$ est un noyau semi-singulier défini dans [2], on a $\widehat{k_R f}(x)=\widetilde{k}f(x)-q(k)f(x)$, où $q(k)=\int_0^R r^{n-1}dr\int_{\Sigma_n}k(r\theta)\sigma_n(d\theta)$,

2) Cf. [1] et [2].

3) Cf. [2], Théorème I.

4) Cf. [2], Théorème II.

noyau h appartienne à la classe $M^{m,\eta,\mu}$; c'est-à-dire, les hypothèses de la proposition 4.2 et la condition d′) dans [2].

Théorème 3. *Soit h un noyau de le classe $M^{m,\eta,\mu}$. Alors,*

1) *si $m>1$, pour toute $f\in C_k^0(R^n)$, $h*f\in C^1(R^n)$ et*
$$D_i(h*f)=(D_ih)*f \qquad (1\leqslant i\leqslant n),$$
2) *si $m=1$, pour toute $f\in C_k^{0,\lambda}(R^n)(0<\lambda-\eta<\mu) h*f\in C^1(R^n)$* et
$$D_i(h*f)=(PfD_ih)*f+A_i(h)f \qquad (1\leqslant i\leqslant n),$$
où $A_i(h)=R^{n-1}\int_{\Sigma_n} h(R\theta)\theta_i\sigma_n(d\theta)$.

Démonstration. En posant $\varphi_\varepsilon(x)=\int_{|y-x|>\varepsilon} h(x-y)f(y)dy$, on a[5]
$$\begin{aligned}D_i\varphi_\varepsilon(x)&=\int_{|y-x|>\varepsilon} D_ih(x-y)f(y)dy+\varepsilon^{n-1}\int_{\Sigma_n} h(\varepsilon\theta)f(x-\varepsilon\theta)\theta_i\sigma_n(d\theta)\\
&=\widehat{D_ih}_{R,\varepsilon}f(x)\\
&\quad+\left[\int_{R\geq|y-x|>\varepsilon} D_ih(x-y)dy+\varepsilon^{n-1}\int_{\Sigma_n} h(\varepsilon\theta)\theta_i\sigma_n(d\theta)\right]f(x)\\
&\quad+\varepsilon^{n-1}\int_{\Sigma_n} h(\varepsilon\theta)[f(x-\varepsilon\theta)-f(x)]\theta_i\sigma_n(d\theta)\cdot f(x).\end{aligned}$$
$\widehat{D_ih}_{R,\varepsilon}f$ tend vers $\widehat{D_ih}f=(PfD_ih)*f$ uniformément dans R^n (Proposition). Le second terme au troisième membre est égal à $A_i(h)f(x)$, d'après la formule de Green. Le troisième terme tend vers 0 uniformément dans R^n. Puisque $\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(x)=h*f(x)$, on a le théorème.

En rappelante l'argument dans [2], on obtient le théorème suivant.

Théorème 4. *Soient $h\in M^{m,\eta,\mu}$ et, λ un nombre tel que $0<\lambda\leqslant 1$ et $0<\lambda-\eta<\mu\leqslant 1$. Alors, l'opérateur de convolution $f\to h*f$ associé à h applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p+m,\lambda-\eta}(R^n)$ ($p\geqslant 0$ entier, K compact fixé de R^n).*

5. Corollaire (*le cas du potentiel d'ordre α*). *Soit h un noyau du potentiel d'ordre α, où $m-1<\alpha\leqslant m$ ($m\geqslant 1$ entier). Alors, pour $f\in C_k^{p,\lambda}(R^n)$ $(m-\alpha<\lambda\leqslant 1)$, $h*f\in C^{p+m,\lambda-(m-\alpha)}(R^n)$. D'ailleurs l'application de $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p+m,\lambda-(m-\alpha)}(R^n)$ est continue.*

Références

[1] P. Courrège: Noyaux de convolution singuliers opérant sur les fonctions Höldériennes et Noyau de convolution régularisants. Séminaire de Probabilites. I. Springer-Verlag, 34–51 (1966).

[2] Y. Ito: Sur la différentiabilité et la continuité des potentiels associés en valeur principale à noyaux singuliers de m-fois régularisants (à paraître).

5) Cf. [1], p. 48.