56. *Remarque sur la somme des résolvantes*

Par Masayuki ITO
Institut Mathématique d'Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., March 12, 1970)

1. Soit X un groupe abélien localement compact, et on désigne par dx sa mesure de Haar. Rappelons qu'un noyau de Dirichlet κ sur X est une mesure de Radon positive dans X et dont la transformation de Fourier est de la forme $\hat{\kappa}=1/\lambda$, où λ est une fonction définie-négative sur le groupe dual $\hat{X}$ de X, à valeurs réelles et telle que $1/\lambda$ soit localement sommable (cf. [1]). Une fonction λ complexe et continue sur $\hat{X}$ est dite d'être définie-négative si, quel que soit m un entier >0 et quel que soit $(\hat{x}_i)_{i=1}^m$ un système de $\hat{X}$, la forme quadratique

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}[\lambda(\hat{x}_i)+\overline{\lambda(\hat{x}_j)}-\lambda(\hat{x}_i-\hat{x}_j)]\rho_i\bar{\rho}_j \tag{1}$$

est non-négative.

On connaît qu'à un noyau de Dirichlet κ sur X, on peut associer une famille $(\kappa_p)_{p\geq 0}$ des noyaux de Dirichlet sur X, et une seule telle que l'on ait $\kappa_0=\kappa$ et, quels que soient $p, q>0$,

$$\kappa_p-\kappa_q=(q-p)\kappa_p*\kappa_q, \tag{2}$$

qui s'appelle la résolvante associée à κ.

Continuant la recherche sur la somme des noyaux de Dirichlet (cf. [3]), on se propose ici de montrer le théorème suivant:

Théorème. *Soit κ un noyau de Dirichlet sur X, et soit $(\kappa_p)_{p\geq 0}$ la résolvante associée à κ, alors l'application $p\to\kappa_p$ est vaguement continue et, pour une mesure positive $\mu(\neq 0)$ sur $[0,\infty)$ et avec $\int d\mu<+\infty$, $\kappa_\mu=\int\kappa_p d\mu(p)$ est aussi un noyau de Dirichlet sur X.*

Il en résultera immédiatement que la somme des noyaux de Yukawa est un noyau de Dirichlet.

2. Démonstration du théorème. Cela résultera du lemme suivant:

Lemme. *Soit λ une fonction définie-négative sur $\hat{X}$ et à valeurs réelles. Pour deux systèmes $(p_i)_{i=1}^m$ et $(a_i)_{i=1}^m$ de nombres ≥ 0 avec $\sum_{i=1}^m a_i=1$, on pose*

$$\lambda_m(\hat{x})=\frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{p_i+\lambda(\hat{x})}}. \tag{3}$$

Elle est aussi définie-négative sur $\hat{X}$, et il existe une mesure de Radon positive σ_m symétrique sur X, avec $\int d\sigma_m<+\infty$ et telle que

$$\lambda_m(\hat{x})=\lambda(\hat{x})+p_a-\hat{\sigma}_m(\hat{x}), \tag{4}$$

où $p_a=\sum_{i=1}^m a_i p_i$.

On le montrera de la manière inductive par rapport à m. Dans le cas où $m=1$, notre lemme est évident. Soit $m\geqq 2$, on peut supposer alors que $0<\sum_{i=1}^{m-1} a_i<1$ et que $p_1<p_2\cdots<p_m$. On pose

$$b=\sum_{i=1}^{m-1} a_i \quad \text{et} \quad p'_a=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{m-1} a_i p_i. \tag{5}$$

Supposons que la fonction

$$\lambda_{m-1}(\hat{x})=\left(\sum_{i=1}^{m-1}\frac{a_i}{p_i+\lambda(\hat{x})}\right)^{-1} \tag{6}$$

est définie-négative sur $\hat{X}$ et qu'il existe une mesure de Radon positive σ_{m-1} symétrique sur X, avec $\int d\sigma_{m-1}<+\infty$ et telle que

$$\lambda_{m-1}(\hat{x})=\frac{1}{b}(\lambda(\hat{x})+p'_a-\hat{\sigma}_{m-1}(\hat{x})), \tag{7}$$

on a alors

$$\begin{aligned}\lambda_m(\hat{x})&=\frac{(\lambda(\hat{x}))^2+(p_m+p'_a-\hat{\sigma}_{m-1}(\hat{x}))\lambda(\hat{x})+p'_ap_m-p_m\hat{\sigma}_{m-1}(\hat{x})}{\lambda(\hat{x})+bp_m+(1-b)p'_a-(1-b)\hat{\sigma}_{m-1}(\hat{x})}\\&=\lambda(\hat{x})+p_a-b\hat{\sigma}_{m-1}(\hat{x})-\frac{c_1+c_2\hat{\sigma}_{m-1}(\hat{x})+c_3(\hat{\sigma}_{m-1}(\hat{x}))^2}{\lambda(\hat{x})+bp_m+(1-b)p'_a-(1-b)\hat{\sigma}_{m-1}(\hat{x})},\end{aligned} \tag{8}$$

où

$$c_1=((1-b)p_m+bp'_a)(bp_m+(1-b)p'_a)-p'_ap_m>0, \tag{9}$$

$$c_2=(1-b^2-(1-b)^2)p_m-2b(1-b)p'_a>(1-b^2-(1-b)^2-2b(1-b))p'_a=0, \tag{10}$$

$$c_3=b(1-b)>0. \tag{11}$$

La fonction $\lambda_b(\hat{x})=\lambda(\hat{x})+bp_m+(1-b)p'_a-(1-b)\hat{\sigma}_{m-1}(\hat{x})$ est définie-négative sur $\hat{X}$, à valeurs réelles et avec $\lambda_b(\hat{0})\geqq bp_m>0$, et il existe donc un noyau de Dirichlet κ_b sur X et telle que l'on ait $\hat{\kappa}_b=1/\lambda_b$. On a $\int d\kappa_b\leqq 1/bp_m$. En posant

$$\sigma_m=b\sigma_{m-1}+c_1\kappa_b+\kappa_b*(c_2\sigma_{m-1}+c_3\sigma_{m-1}*\sigma_{m-1}), \tag{12}$$

on obtient alors que $\int d\sigma_m<+\infty$ et que

$$\lambda_m(\hat{x})=\lambda(\hat{x})+p_a-\hat{\sigma}_m(\hat{x}). \tag{13}$$

Ayant $\lambda_m(\hat{0})\geqq 0$, on a alors $\int d\sigma_m\leqq\lambda(\hat{0})+p_a$, et par suite, $\lambda(\hat{0})+p_a-\hat{\sigma}_{m-1}(x)$ est définie-négative sur $\hat{X}$ à valeurs réelles, d'où notre lemme.

Montrons notre théorème. Soit λ la fonction définie-négative sur $\hat{X}$ et telle que $\hat{\kappa}=1/\lambda$, on a alors, quel que soit $p>0$, $\hat{\kappa}_p=1/(p+\lambda)$. On a donc

$$\hat{\kappa}_\mu=\int\hat{\kappa}_p d\mu(p)=\int\frac{1}{p+\lambda}d\mu(p). \tag{14}$$

Posant

$$\lambda(\hat{x})=\left(\int\frac{1}{p+\lambda(\hat{x})}d\mu(p)\right)^{-1}, \tag{15}$$

elle est alors finie et continue dans $\hat{X}$, et, d'après le lemme 1, elle est définie-négative. Cela indique que κ_μ est un noyau de Dirichlet sur X.

Corollaire. *Soit* $\kappa_p(x)=e^{-p|x|}/|x|$ *sur l'espace euclidien* R^3 *à* 3 *dimensions,*[1] *et soit* μ *une mesure positive sur* $[0, \infty)$ *avce* $\int d\mu<+\infty$, $\kappa_\mu=\int\kappa_p d_\mu(p)$ *est un noyau de Dirichlet sur* R^3, *c'est-à-dire,* κ_μ *satisfait au principe complet du maximum.*[2]

En effect, on a

$$\hat{\kappa}_p(x)=\frac{1}{p^2+4\pi|x|^2},$$

et, d'après notre théorème, κ_μ est un noyau de Dirichlet sur R^3.

Référènces

[1] A. Beurling et J. Deny: Dirichlet spaces. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., **45**, 208–215 (1959).
[2] M. Itô: Les noyaux réguliers et les noyaux singuliers (à paraître).
[3] ——: Sur la somme des noyaux de Dirichlet. Ann. Inst. Fourier (à paraître).

1) Cette fonction s'appelle le noyau de Yukawa.

2) Cela signifie que, quelles que soient ν_1, ν_2 de mesures positives dans R^3 à support compact, $(\kappa_\mu)*\nu_1(x)\leqq(\kappa_\mu)*\nu_2(x)+1$ dans R^3 dès que la même inégalité a lieu sur le support de ν_1.