

39. La décomposition de singularités d'ultradistributions cohomologiques

Par Mitsuo MORIMOTO

(Comm. by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., March 13, 1972)

Le but de cette note est d'annoncer des résultats concernant la décomposition de singularités (modulo fonctions entières) d'ultradistributions cohomologiques. Notre présente théorie est analogue à celle du faisceau \mathcal{C} pour les hyperfonctions ([3], voir aussi [4, 5]).

Soit V un espace euclidien réel à n dimensions. Notons son complexifié par $V_{\mathcal{C}} = V \times \sqrt{-1} V$. Soit \mathcal{O} le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $V_{\mathcal{C}}$. Pour un ouvert Ω de $V_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{O}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes sur Ω . On note le k -ième espace de cohomologie relative à support dans un localement fermé F de $V_{\mathcal{C}}$ et à coefficients dans le faisceau \mathcal{O} par $H^k[F] \cong H^k_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathcal{O})$, où Ω désigne un ouvert de $V_{\mathcal{C}}$ contenant F comme son sous-ensemble fermé. L'espace $\mathcal{U}(V)$ des ultradistributions cohomologiques (ou plutôt ultra-hyperfonctions) sur V est, par définition, la limite inductive des n -ièmes espaces de cohomologie relative à support dans un tube $T(G) = V \times \sqrt{-1} G$ à base convexe compacte et à coefficients dans le faisceau \mathcal{O} :

$$\mathcal{U}(V) = \lim_{G \subset V} \text{ind } H^n[T(G)],$$

où G parcourt tous les compacts convexes de V , la limite inductive étant prise suivant les applications naturelles:

$$H^n[T(G)] \rightarrow H^n[T(G')], \quad G \subset G'.$$

On a montré dans notre article précédent [2] que l'espace des ultra-hyperfonctions $\mathcal{U}(V)$ contient l'espace des fonctionnelles analytiques sur $V_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{O}(V_{\mathcal{C}})'$ et l'espace des hyperfonctions sur V , $\mathcal{B}(V) = H^n[T(\{0\})]$, où $T(\{0\}) = V \times \sqrt{-1} 0 = V$.

Désignons par V^* le dual de l'espace vectoriel V , par \langle, \rangle le produit scalaire canonique sur $V \times V^*$. S_{∞}^* est, par définition, l'ensemble des demi-droites issues de l'origine de V^* :

$$S_{\infty}^* = (V^* \setminus \{0\}) / \mathbf{R}^+.$$

Pour un vecteur non nul $\xi \in V^*$ on note par ξ_{∞} la demi-droite issue de l'origine de V^* qui passe par le point ξ . S_{∞}^* est isomorphe à la $(n-1)$ -sphère et sera appelée la cosphère à l'infini. On note par p la projection $\xi \mapsto \xi_{\infty}$ de $V^* \setminus \{0\}$ sur S_{∞}^* . Un sous-ensemble I de S_{∞}^* est dit convexe si le cône $p^{-1}(I)$ l'est. On désigne par $D(I)$ le cône dual non-positif fermé de I :

$$D(I) = \{x \in V; \langle x, \xi \rangle \leq 0 \text{ pour tout } \xi \in p^{-1}(I)\}.$$

Si on a $I \supset J$, alors $D(I) \subset D(J)$. Pour $x \in V$, $D(I) + x$ désigne le cône translaté de $D(I)$. Pour I ouvert convexe de S_*^* , on pose

$$\Psi_1(I) = \lim_{x \in V} \text{ind } H^n[T(D(I) + x)],$$

où la limite inductive est prise suivant les applications naturelles :

$$H^n[T(D(I) + x)] \rightarrow H^n[T(D(I) + x')], \quad T(D(I) + x) \subset T(D(I) + x').$$

Si I et J sont deux ouverts convexes de S_*^* tels que $I \supset J$, alors l'application $p_J^I: \Psi_1(I) \rightarrow \Psi_1(J)$ est définie comme la limite inductive des applications naturelles: $H^n[T(D(I) + x)] \rightarrow H^n[T(D(J) + x)]$. Il est clair que les p_J^I satisfont à la condition de chaîne. Comme la famille des ouverts convexes de S_*^* forme une base des ouverts de S_*^* , les $\Psi_1(I)$ forment, avec les applications p_J^I , un préfaisceau Ψ_1 de $\mathcal{O}(V_{\mathcal{C}})$ -modules sur S_*^* .

Théorème 1. *On désigne par Ψ le faisceau sur S_*^* associé au préfaisceau Ψ_1 . L'espace des sections de Ψ sur un ouvert convexe I de S_*^* , $\Psi(I)$ est donné par $\Psi(I) = \lim_{I' \subset I} \text{proj } \Psi_1(I')$, où I' parcourt tous les ouverts convexes relativement compacts dans I .*

Notre faisceau Ψ sert de caractériser la singularité d'une ultra-hyperfonction modulo fonctions entières. Une fonction entière f définit, par restriction, une ultra-hyperfonction que nous noterons par $\rho(f)$. Plus précisément, l'application ρ de $\mathcal{O}(V_{\mathcal{C}})$ dans $\mathcal{U}(V)$ est définie comme composée :

$$\mathcal{O}(V_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\text{rest}} \mathcal{A}(V) \longrightarrow \mathcal{B}(V) \longrightarrow \mathcal{U}(V),$$

où $\mathcal{A}(V)$ désigne l'espace des fonctions réel-analytiques sur V . L'application ρ est injective, étant composée des injections. Construisons maintenant une application σ de $\mathcal{U}(V)$ dans l'espace des sections de Ψ sur S_*^* , $\Psi(S_*^*)$. Pour un compact convexe G de V et un ouvert convexe propre I de S_*^* , il existe un point x de V tel que $G \subset D(I) + x$. Alors l'application naturelle: $H^n[T(G)] \rightarrow H^n[T(D(I) + x)]$ est définie. Comme la limite inductive de ces applications, on définit l'application $\sigma_I: \mathcal{U}(V) \rightarrow \Psi(I)$. Si J est un autre ouvert convexe de S_*^* , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \Psi(I) & \\ \sigma_I \nearrow & & \searrow p_{I \cap J}^I \\ \mathcal{U}(V) & & \Psi(I \cap J) \\ \sigma_J \searrow & & \nearrow p_{I \cap J}^J \\ & \Psi(J) & \end{array}$$

Par conséquent les applications σ_I , se recollant, définissent une application $\sigma: \mathcal{U}(V) \rightarrow \Psi(S_*^*)$. On a alors le théorème central de cette note.

Théorème 2. *La suite suivante est exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(V_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\rho} \mathcal{U}(V) \xrightarrow{\sigma} \Psi(S_*^*) \longrightarrow 0.$$

Désignons par S_0 l'ensemble des demi-droites issues de l'origine de V . S_0 est isomorphe à la $(n-1)$ -sphère et sera appelée sphère à

l'origine. Pour un point $x \in V, x \neq 0$, on note par x_0 l'élément de S_0 contenant le point x . L'application $q: x \rightarrow x_0$ est la projection de $V \setminus \{0\}$ sur S_0 et on a

$$S_0 = (V \setminus \{0\}) / \mathbf{R}^+.$$

Un sous-ensemble Γ de S_0 est dit convexe si le cône $q^{-1}(\Gamma)$ l'est. Posons, pour un ouvert convexe Γ de S_0 ,

$$\mathcal{P}_1(\Gamma) = \lim_{x \in V} \text{ind } \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma) + x)),$$

où la limite inductive est prise suivant les restrictions :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma) + x)) &\rightarrow \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma) + x')), \\ T(q^{-1}(\Gamma) + x) &\supset T(q^{-1}(\Gamma) + x'). \end{aligned}$$

Soit Δ un autre ouvert convexe de S_0 tel que $\Gamma \supset \Delta$. Alors on définit l'application $q_\Delta^r: \mathcal{P}_1(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}_1(\Delta)$ comme la limite inductive des applications de restriction: $\mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma) + x)) \rightarrow \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Delta) + x))$. Il est clair que les $\mathcal{P}_1(\Gamma)$ et les q_Δ^r forment un préfaisceau \mathcal{P}_1 sur S_0 . On désigne par \mathcal{P} le faisceau sur S_0 associé au préfaisceau \mathcal{P}_1 . L'espace des sections de \mathcal{P} sur un ouvert convexe Γ de S_0 , $\mathcal{P}(\Gamma)$ est donné par: $\mathcal{P}(\Gamma) = \lim_{\Gamma' \subset \Gamma} \text{proj } \mathcal{P}_1(\Gamma')$, où Γ' parcourt les sous-ensembles ouverts convexes et relativement compacts de Γ . Remarquons que l'espace des sections sur un domaine Γ de S_0 du faisceau \mathcal{P} est égal à l'espace des fonctions entières $\mathcal{O}(V_{\mathcal{C}})$ pourvu que $\Gamma \cap (-\Gamma) \neq \emptyset$. On peut définir l'application de "valeur au bord" $\delta_\Gamma: \mathcal{P}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{U}(V)$ comme l'application de cobord de cohomologie.

Théorème 3. *Pour un ouvert convexe Γ de S_0 , on prend l'ensemble Γ^* fermé convexe de S_0^* tel que $\overline{(q^{-1}(\Gamma))} = -D(\Gamma^*)$, $\overline{(q^{-1}(\Gamma))}$ désignant l'adhérence de $q^{-1}(\Gamma)$. Une ultra-hyperfonction φ appartient à l'image de $\delta_\Gamma: \mathcal{P}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{U}(V)$ si et seulement si le support de $\sigma(\varphi)$ est contenu dans Γ^* .*

Supposons maintenant que Γ est un convexe relativement ouvert de S_0 , c'est-à-dire que le cône $q^{-1}(\Gamma)$ est convexe et ouvert dans le sous-espace affine de V engendré par $q^{-1}(\Gamma)$. On note par $\text{codim } \Gamma$ la codimension du susdit sous-espace de V . On a alors

$$H_\Gamma^k(S_0; \mathcal{P}) = \lim_{x \in V} \text{ind } H^k[T(q^{-1}(\Gamma) + x)].$$

Remarquons la nullité suivante:

$$H_\Gamma^k(S_0; \mathcal{P}) = 0 \quad \text{si } k \neq \text{codim } \Gamma.$$

On peut définir même dans cette situation l'application de "valeur au bord" $\delta_\Gamma: H_\Gamma^{\text{codim } \Gamma}(S_0; \mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{U}(V)$.

Théorème 3 bis. *Soit Γ un convexe relativement ouvert de S_0 . Une ultrahyperfonction φ appartient à l'image de $\delta_\Gamma: H_\Gamma^{\text{codim } \Gamma}(S_0; \mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{U}(V)$ si et seulement si le support de $\sigma(\varphi)$ est contenu dans Γ^* .*

Remarques. On peut définir un sous-faisceau $\tilde{\mathcal{P}}$ de \mathcal{P} et un sous-faisceau $\tilde{\mathcal{P}}$ de \mathcal{P} comme suit: Posons, pour un ouvert convexe I de S_0^* ,

$$\tilde{\Psi}(I) = H^n[T(D(I))].$$

Pour deux ouverts convexes I, J de S_*^* tels que $I \supset J$, l'application $\tilde{p}_J^I: \tilde{\Psi}(I) \rightarrow \tilde{\Psi}(J)$ est définie par l'application naturelle: $H^n[T(D(I))] \rightarrow H^n[T(D(J))]$. Alors le préfaisceau $\tilde{\Psi}$ sur S_*^* défini par les $\tilde{\Psi}(I)$ et les \tilde{p}_J^I est sous-faisceau du faisceau Ψ . L'application $\tilde{\sigma}_I: \mathcal{B}(V) \rightarrow \tilde{\Psi}(I)$ est définie comme l'application naturelle: $H^n[T(\{0\})] \rightarrow H^n[T(D(I))]$. En recollant les applications $\tilde{\sigma}_I$, on définit l'application $\tilde{\sigma}: \mathcal{B}(V) \rightarrow \tilde{\Psi}(S_*^*)$. Alors on a la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(V_c) \xrightarrow{\tilde{\rho}} \mathcal{B}(V) \xrightarrow{\tilde{\sigma}} \tilde{\Psi}(S_*^*) \longrightarrow 0,$$

où l'application $\tilde{\rho}$ est la restriction. Comparer cette suite avec la suite exacte du théorème (5.1) de [3].

Posons, pour un ouvert convexe Γ de S_0 ,

$$\tilde{\mathcal{P}}(\Gamma) = \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma))).$$

Avec les applications de restriction $\tilde{q}_\Delta^I: \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Gamma))) \rightarrow \mathcal{O}(T(q^{-1}(\Delta)))$, $T(q^{-1}(\Gamma)) \supset T(q^{-1}(\Delta))$, les $\tilde{\mathcal{P}}(\Gamma)$ forment un préfaisceau $\tilde{\mathcal{P}}$. Le préfaisceau $\tilde{\mathcal{P}}$ est sous-faisceau du faisceau \mathcal{P} sur S_0 . On peut définir l'application de "valeur au bord" $\tilde{\delta}_\Gamma: \tilde{\mathcal{P}}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{B}(V)$ comme l'application de cobord. Une hyperfonction φ appartient à l'image de $\tilde{\delta}_\Gamma: \tilde{\mathcal{P}}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{B}(V)$ si et seulement si le support de $\tilde{\sigma}(\varphi)$ est contenu dans Γ^* .

Un analogue du théorème 3 bis est aussi valable pour les faisceaux $\tilde{\mathcal{P}}$ et \mathcal{B} .

Applications. Vu les théorèmes 2 et 3, on peut dire que le support de la section $\sigma(\varphi)$ du faisceau Ψ caractérise la singularité d'une ultra-hyperfonction $\varphi \in \mathcal{U}(V)$ modulo fonctions entières. Un théorème du type "Edge of the Wedge" en cadre des ultra-hyperfonctions est un corollaire direct de nos théorèmes. On a par exemple

Théorème 4. Soient Γ_1 et Γ_2 deux ouverts convexes de S_0 . Γ désigne l'enveloppe convexe de Γ_1 et Γ_2 . Si $f_1 \in \mathcal{P}(\Gamma_1)$ et $f_2 \in \mathcal{P}(\Gamma_2)$ satisfont à la condition:

$$\delta_{\Gamma_1}(f_1) = \delta_{\Gamma_2}(f_2) \text{ dans } \mathcal{U}(V),$$

alors il existe $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$ dont les restrictions sur $\mathcal{P}(\Gamma_1)$ et $\mathcal{P}(\Gamma_2)$ coïncident respectivement avec f_1 et f_2 . Si Γ coïncide avec S_0 , alors f est fonction entière.

En utilisant le faisceau Ψ , on peut démontrer une version du théorème fondamental de M. Sato [4, 5] en cadre des ultra-hyperfonctions. La démonstration repose sur le théorème de Cauchy-Kovalevskaja.

Théorème 5. Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre m . $P_m(\xi)$ est son polynôme caractéristique. Si une ultra-hyperfonction φ satisfait à l'équation aux dérivées partielles $P(D)\varphi = 0$, alors on a

$$\text{supp } \sigma(\varphi) \subset \{\xi_\infty; P_m(\xi) = 0\}.$$

Corollaire. *Si l'opérateur $P(D)$ est elliptique, alors $\varphi \in \mathcal{U}(V)$ qui satisfait à l'équation $P(D)\varphi=0$ est restriction d'une fonction entière.*

Ce corollaire en cas d'hyperfonctions se trouve implicitement dans la démonstration du théorème (VII. 1. 8) de [1].

Les démonstrations détaillées seront publiées ailleurs.

Références

- [1] Komatsu, H.: Les hyperfonctions et les équations aux dérivées partielles à coefficients constants. Univ. Tokyo Seminar Notes No. 22 (1968) (en japonais).
- [2] Morimoto, M.: Sur les ultradistributions cohomologiques. Ann. Inst. Fourier, **19**, 129–153 (1970).
- [3] —: Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, **17**, 215–239 (1970).
- [4] Sato, M.: Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations. Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, pp. 789–794.
- [5] Sato, M., et M. Kashiwara: Structure des hyperfonctions. Sûgaku-no-Ayumi, **15**, 9–71 (1970) (en japonais).