38. *Une remarque sur la perturbation d'opérateurs m-accrétifs dans un espace de Banach*

Par Yoshio KONISHI
Département de Mathématiques, Université de Tokyo

(Comm. by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., March 13, 1972)

1. Soit X un espace de Banach sur $\boldsymbol{R}$ et soit A un opérateur (univoque) de $D(A)\subset X$ dans X. On dit que A est *accrétif* si

$$\|(x_1+\lambda Ax_1)-(x_2+\lambda Ax_2)\|\geq\|x_1-x_2\|$$

pour $\lambda>0$ et $x_1, x_2\in D(A)$.

Tout opérateur A accrétif dans X ayant la propriété $R(I+A)=X$ est dit *m-accrétif*. Récemment Webb, dans [8], a obtenu le résultat suivant:

Proposition. *Soit $\mathcal{G}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu de contractions linéaires dans X*[1] *et soit $B: X\to X$ un opérateur continu, partout défini et accrétif. Alors $-\mathcal{G}+B$ est m-accrétif.*

Le but de cette note est d'indiquer une application de cette proposition.

2. Rappelons-nous qu'un opérateur A dans X est accrétif si et seulement si

$$\tau(x_1-x_2, Ax_1-Ax_2)\geq 0 \qquad \text{pour } x_1, x_2\in D(A),$$

où $\tau(x, y)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\|x+\varepsilon y\|-\|x\|)/\varepsilon$.

Soient S un espace localement compact et μ une mesure positive sur S telle que

$$\mu(S)<\infty. \tag{2.1}$$

Dans le cas où $X=L^1(S)$, on a

$$\tau(f, g)=\int_{\{s\in S;\, f(s)\neq 0\}}(\operatorname{sgn} f(s))g(s)\mu(ds)+\int_{\{s\in S;\, f(s)=0\}}|g(s)|\,\mu(ds) \tag{2.2}$$

(voir Sato [7]). D'autre part, soit $\beta: D(\beta)\subset\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ une fonction m-accrétive non nécessairement partout définie. On fait correspondre à β un prolongement canonique β_1 dans $L^1(S)$ en posant:

$$\begin{aligned} &D(\beta_1)=\{u\in L^1(S)\,;\, u(s)\in D(\beta) \text{ p.p. sur } S \text{ et } \beta(u(\cdot))\in L^1(S)\},\\ &(\beta_1 u)(s)=\beta(u(s)),\ s\in S,\ \text{si } u\in D(\beta_1). \end{aligned} \tag{2.3}$$

On vérifie aisément que β_1 est m-accrétif.

On obtient le

Théorème. *Soit $\mathcal{G}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{\exp(t\mathcal{G})\}_{t\geq 0}$ continu de contractions linéaires dans $L^1(S)$.*[1] *Supposons que ce semi-groupe soit ⟪sous-Markov⟫ au sens de Kunita [6]: si $f\in L^1(S)$ et $0\leq f\leq 1$, on a $0\leq\exp(t\mathcal{G})f\leq 1$ pour tout $t\geq 0$. Alors $-\mathcal{G}+\beta_1$ est m-*

1) Par conséquent $-\mathcal{G}$ est m-accrétif.

accrétif pourvu que $0 \in D(\beta)$.

Ce théorème généralise le théorème B, (i) de Konishi [5]. Le résultat correspondant dans L^p $(1<p<\infty)$ a été obtenu partiellement par Konishi [4] et Brezis, Crandall et Pazy [1] (pour β multivoque).[2]

3. Le principe de la démonstration est semblable à celui utilisé par [5]. Notons que $\mathcal{G}$ est ⟪*complètement dispersif*⟫ ([6]):

(3.1) $\sigma((f-c)^+, \mathcal{G}f) \le 0$ pour $f \in D(\mathcal{G})$ et $c \in [0, \infty)$,

où

$$\sigma(f, g) = \inf_{c \in [0,\infty),\, f \wedge |k|=0} \tau(f, (g+k) \vee (-cf)), \qquad f \ge 0,$$

et que, d'après [7],

$$\sigma(f, g) = \int_{\{s \in S;\, f(s)>0\}} g(s)\mu(ds), \qquad f \ge 0.$$

Démonstration du théorème. Il est clair, grâce à (2.2), que $-\mathcal{G}+\beta_1$ est accrétif. Il ne nous reste qu'à montrer que $R(I-\mathcal{G}+\beta_1) = L^1(S)$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer dorénavant que $\beta(0)=0$.

$1^{ère}$ *étape*. Nous commençons par établir $R(I-\mathcal{G}+\beta_1) \supset L^\infty(S)$. Fixons $f \in L^\infty(S)$. On définit une fonction β^f m-accrétive bornée partout définie:

$$\beta^f(r) = \begin{cases} \beta((I+\beta)^{-1}(\|f\|_\infty)) & \text{si } r > (I+\beta)^{-1}(\|f\|_\infty) \\ \beta(r) & \text{si } r \in D(\beta) \text{ et } |r+\beta(r)| \le \|f\|_\infty \\ \beta((I+\beta)^{-1}(-\|f\|_\infty)) & \text{si } r < (I+\beta)^{-1}(-\|f\|_\infty), \end{cases}$$

où $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{L^\infty(S)}$. On définit l'opérateur β_1^f dans $L^1(S)$ par (2.3) avec $\beta = \beta^f$. D'après la proposition $-\mathcal{G}+\beta_1^f$ est m-accrétif. Il en résulte que l'équation

(3.2) $$u - \mathcal{G}u + \beta_1^f u = f$$

admet une solution unique $u \in D(\mathcal{G})$. Or on voit grâce à (3.1) que

$$\begin{aligned} &\|((I+\beta_1^f)u - \|f\|_\infty)^+\|_{L^1(S)} \\ &= \int_{\{s \in S;\, u(s) > (I+\beta^f)^{-1}(\|f\|_\infty)\}} (u(s) + \beta^f(u(s)) - \|f\|_\infty)\mu(ds) \\ &= \int_{\{s \in S;\, u(s) > (I+\beta^f)^{-1}(\|f\|_\infty)\}} ((\mathcal{G}u)(s) + f(s) - \|f\|_\infty)\mu(ds) \le 0 \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} &\|((I+\beta_1^f)u + \|f\|_\infty)^-\|_{L^1(S)} \\ &= -\int_{\{s \in S;\, u(s) < (I+\beta^f)^{-1}(-\|f\|_\infty)\}} (u(s) + \beta^f(u(s)) + \|f\|_\infty)\mu(ds) \\ &= -\int_{\{s \in S;\, u(s) < (I+\beta^f)^{-1}(-\|f\|_\infty)\}} ((\mathcal{G}u)(s) + f(s) + \|f\|_\infty)\mu(ds) \le 0. \end{aligned}$$

D'ou $|u(s)+\beta^f(u(s))| \le \|f\|_\infty$ p.p. sur S. Par suite $u \in D(\mathcal{G}) \cap D(\beta_1)$ et l'équation (3.2) s'écrit $u - \mathcal{G}u + \beta_1 u = f$.

---

2) Professeur Haim Brezis [lettre] a informé l'auteur de son résultat ([*a*]) correspondant dans L^p $(1 \le p \le \infty)$ pour β *multivoque*, dont la démonstration *n'utilise pas* le résultat de Webb.

$2^{\text{ième}}$ *étape.* On cherche à prouver

$$R(I-\mathcal{G}+\beta_1)\supset E\equiv\{f\in L^1(S)\,;\,\inf_{s\in S}\operatorname{ess} f(s)>-\infty\}.$$

Fixant $f\in E$, on pose

$$f^{(n)}(s)=\begin{cases} n & \text{si } f(s)>n \\ f(s) & \text{si } f(s)\leq n\end{cases},\quad n=1,2,\cdots.$$

Grâce à la $1^{\text{ère}}$ étape il existe une suite $\{u^{(n)}\}_{n\geq 1}\subset D(\mathcal{G})\cap D(\beta_1)$ vérifiant

$$u^{(n)}-\mathcal{G}u^{(n)}+\beta_1 u^{(n)}=f^{(n)},\qquad n=1,2,\cdots,$$

et, puisque $-\mathcal{G}+\beta_1$ est accrétif, on en déduit que $\{u^{(n)}\}_{n\geq 1}$ est Cauchy dans $L^1(S)$. On a donc

(3.3) $$\lim_{n\to\infty} u^{(n)}=u\qquad \text{dans } L^1(S).$$

Par ailleurs, on sait que $\mathcal{G}-\beta_1$ est ⟪0-*dispersif* (*s*)⟫ au sens de Konishi [3]:

$$\sigma((g-h)^+,(\mathcal{G}-\beta_1)g-(\mathcal{G}-\beta_1)h)\leq 0,\ g,h\in D(\mathcal{G})\cap D(\beta_1)\,;$$

donc

$$u^{(1)}\leq u^{(2)}\leq\cdots\leq u^{(n)}\leq\cdots$$

(le lemme 1 de [3]) et

$$\beta_1 u^{(1)}\leq\beta_1 u^{(2)}\leq\cdots\leq\beta_1 u^{(n)}\leq\cdots.$$

D'autre part on a d'après (3.1) l'estimation qui est le point essentiel (voir aussi (3.5)):

$$\begin{aligned}\|(\beta_1 u^{(n)})^+\|_{L^1(S)}&=\int_{\{s\in S;\,u^{(n)}(s)>0\}}(\beta_1 u^{(n)})(s)\mu(ds)\\ &=\int_{\{s\in S;\,u^{(n)}(s)>0\}}(-u^{(n)}+\mathcal{G}u^{(n)}+f^{(n)})(s)\mu(ds)\leq\|f\|_{L^1(S)},\end{aligned}$$

de sorte que $\{\beta_1 u^{(n)}\}$ est Cauchy dans $L^1(S)$. D'après (3.3) on a $u\in D(\beta_1)$ et

(3.4) $$\lim_{n\to\infty}\beta_1 u^{(n)}=\beta_1 u\qquad \text{dans } L^1(S).$$

Il résulte de (3.3) et (3.4) que

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{G}u^{(n)}=u+\beta_1 u-f\qquad \text{dans } L^1(S),$$

d'où il vient $u\in D(\mathcal{G})$ et $\mathcal{G}u=u+\beta_1 u-f$.

$3^{\text{ième}}$ *étape.* Enfin on vérifie $R(I-\mathcal{G}+\beta_1)=L^1(S)$. On pose $f\in L^1(S)$ et définit $\{f_{(n)}\}_{n\geq 1}$ par

$$f_{(n)}(s)=\begin{cases} f(s) & \text{si } f(s)\geq -n \\ -n & \text{si } f(s)<-n\end{cases},\quad n=1,2,\cdots.$$

Grâce à la $2^{\text{ième}}$ étape il existe une suite $\{u_{(n)}\}_{n\geq 1}\subset D(\mathcal{G})\cap D(\beta_1)$ telle que

$$u_{(n)}-\mathcal{G}u_{(n)}+\beta_1 u_{(n)}=f_{(n)},\qquad n=1,2,\cdots.$$

Il est immédiat que

$$\lim_{n\to\infty}u_{(n)}=u\qquad \text{dans } L^1(S)$$

et

$$u_{(1)}\geq u_{(2)}\geq\cdots\geq u_{(n)}\geq\cdots.$$

D'où

$$\beta_1 u_{(1)}\geq\beta_1 u_{(2)}\geq\cdots\geq\beta_1 u_{(n)}\geq\cdots.$$

Ensuite

$$
\begin{aligned}
(3.5)\qquad \|(\beta_1 u_{(n)})^-\|_{L^1(S)} &= -\int_{\{s\in S;\, u(n)(s)<0\}} (\beta_1 u_{(n)})(s)\mu(ds) \\
&= \int_{\{s\in S;\, u(n)(s)<0\}} (u_{(n)} - \mathcal{G}u_{(n)} - f_{(n)})(s)\mu(ds) \leq \|f\|_{L^1(S)}.
\end{aligned}
$$

Enfin, on conclut, comme dans la $2^{\text{ième}}$ étape, que $u\in D(\mathcal{G})\cap D(\beta_1)$ et $u-\mathcal{G}u+\beta_1 u=f$. Autrement dit, $f\in R(I-\mathcal{G}+\beta_1)$.

Le théorème est ainsi démontré.

4. Appliquant le théorème I de Crandall et Liggett [2] à $-\mathcal{G}+\beta_1$ dans le théorème, on arrive au

Corollaire. *$\mathcal{G}-\beta_1$ engendre un semi-groupe $\{\exp(t(\mathcal{G}-\beta_1))\}_{t\geq 0}$ continu de contractions (non linéaires) sur $\overline{D(\mathcal{G})\cap D(\beta_1)}=\{f\in L^1(S)\,;\, f(s) \in \overline{D(\beta)}$ p.p. sur $S\}$*[3] *au sens de* [2]. *De plus ce semi-groupe est ⟪ordre-préservant⟫ au sens de* [3]: *si $f, g\in \overline{D(\mathcal{G})\cap D(\beta_1)}$ et $f\leq g$, $\exp(t(\mathcal{G}-\beta_1))f \leq \exp(t(\mathcal{G}-\beta_1))g$ pour tout $t\geq 0$.*

5. Commentaires. Il serait peut-être intéressant d'étudier la différentiabilité de ce semi-groupe.

L'auteur n'est pas certain si le théorème démontré dans ce mémoire soit encore valable (pourvue que $\beta(0)=0$) sans l'hypothèse (2.1) ou non.

Références

[1] H. Brezis, M. G. Crandall, et A. Pazy: Perturbations of nonlinear maximal monotone sets in Banach space. Comm. Pure Appl. Math., **23**, 123–144 (1970).

[2] M. G. Crandall et T. M. Liggett: Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces. Amer. J. Math., **93**, 265–298 (1971).

[3] Y. Konishi: Nonlinear semi-groups in Banach lattices. Proc. Japan Acad., **47**, 24–28 (1971).

[4] ——: A remark on perturbation of m-accretive operators in Banach space. Proc. Japan Acad., **47**, 452–455 (1971).

[5] ——: Some examples of nonlinear semi-groups in Banach lattices. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, **18**, 537–543 (1972).

[6] H. Kunita: Sub-Markov semi-groups in Banach lattices. Proc. Int. Conference on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo), 332–343 (1969).

[7] K. Sato: On the generators of non-negative contraction semi-groups in Banach lattices. J. Math. Soc. Japan, **20**, 423–436 (1968).

[8] G. F. Webb: Continuous nonlinear perturbations of linear accretive operators in Banach spaces (à paraître).

[*a*] H. Brezis, une partie d'un article à paraître en collaboration avec W. Strauss (un manuscrit)[2].

[*b*] M. G. Crandall (lettre)[4].

3) Noter que $\{\lambda(\lambda-\mathcal{G})^{-1}f\,;\, f\in L^1(S)$ et $f(s)+n^{-1}, f(s)-n^{-1}\in\overline{D(\beta)}$ p.p. sur $S\}\subset D(\mathcal{G})\cap D(\beta_1)$ pour $\lambda>0$ et $n=1,2,\cdots$.

4) Professeur Michael G. Crandall [*b*] a fait une remarque que nous pouvons simplifier notre démonstration en notant l'implication:

$$
\begin{matrix} u-\mathcal{G}u+\beta_1 u=f \\ v-\mathcal{G}v+\beta_1 v=g \end{matrix} \Rightarrow \|u-v\|_{L^1(S)}+\|\beta_1 u-\beta_1 v\|_{L^1(S)} \leq \|f-g\|_{L^1(S)}.
$$