63. Sur la compacité des semi-groupes non linéaires dans les espaces de Hilbert

Par Yoshio KONISHI
Département de Mathématiques, Université de Tokyo

(Comm. by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., May 12, 1972)

1. Résultat. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel.[1] Soit $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un *semi-groupe* (continu) *de contractions* (non linéaires) sur un convexe fermé $C\subset\mathcal{H}$, c'est-à-dire, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ est une famille T_t d'applications de $D(T_t)=C$[2] dans C dépendant du paramètre $t\geq 0$, qui satisfait aux quatre propriétés suivantes:

$$T_0x=x, \qquad x\in C,$$
$$T_tT_s=T_{t+s}, \qquad t \text{ et } s\geq 0,$$
$$\lim_{t\downarrow 0} T_tx=x \text{ dans } \mathcal{H}, \qquad x\in C,$$
$$\|T_tx-T_ty\|\leq\|x-y\|, \quad x, y\in C, \quad t\geq 0.$$

Grâce au *théorème de Hille-Yosida non linéaire* (voir, en particulier, Kōmura [5], Kato [4] et Crandall et Pazy [3]) il existe un opérateur A (multivoque) «*maximal monotone*» au sens de Minty et Browder,[3] unique, tel que $\overline{D(A)}=C$ et $\{T_t\}_{t\geq 0}$ coïncide avec le semi-groupe de contractions engendré par $-A$:

$$T_tx=\lim_{n\to\infty}\left(I+\frac{t}{n}A\right)^{-n}x \text{ dans } \mathcal{H} \text{ pour } x\in C \text{ et } t\geq 0.$$

Définition. On dit que le semi-groupe $\{T_t\}_{t\geq 0}$ est *compact* si l'opérateur T_t est compact[4] pour tout $t>0$.

Le but de cette note est de donner une caractérisation de la compacité du semi-groupe $\{T_t\}_{t\geq 0}$. Notre théorème constitue une version non linéaire du théorème 3.3 de Pazy [6].

Théorème. *On emploie les notations ci-dessus. Les propriétés* (a) *et* (b) *sont équivalentes*:

(a) *Le semi-groupe* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *est compact*;

(b) (b_1) *La résolvante* $(I+A)^{-1}$ *est compacte*

et

(b_2) *pour tout sous-ensemble borné* B *de* C, *la famille des fonctions*: $]0, \infty[\ \ni t\mapsto T_tx$, *où* x *parcourt* B, *est équicontinue.*

---

1) La norme est notée $\|\cdot\|$.

2) On désigne par $D(T)$ le domaine de définition d'opérateur T.

3) Par conséquent, pour tout $\lambda>0$, $(I+\lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur $\mathcal{H}$.

4) Un opérateur $T: D(T)\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ est dit *compact* si, pour toute partie B bornée de $D(T)$, l'image $T\cdot B=\{Tx; x\in B\}$ est relativement compacte.

2. Démonstration de l'implication: (a)⇒(b). (b_2) est évident. On va démontrer (b_1). On a, pour $x \in \mathcal{H}$ et $t>0$,

$$T_t(I+A)^{-1}x-(I+A)^{-1}x$$
$$=\int_0^t \frac{d}{ds}T_s(I+A)^{-1}x\,ds=-\int_0^t A^0T_s(I+A)^{-1}x\,ds,$$

où A^0y, $y \in D(A)$, désigne l'élément de norme minimale du convexe fermé Ay.[5] Notons que, pour x_0 fixé $\in C$,

$$\|A^0T_s(I+A)^{-1}x\| \le \|A^0(I+A)^{-1}x\| \le \|x-(I+A)^{-1}x\|$$
$$\le \|x\|+\|(I+A)^{-1}x-(I+A)^{-1}x_0\|+\|(I+A)^{-1}x_0\|$$
$$\le \|x\|+\|x-x_0\|+\|(I+A)^{-1}x_0\|, \qquad s \ge 0.$$

Il en résulte que

$$\|T_t(I+A)^{-1}x-(I+A)^{-1}x\|$$
$$\le t(2\|x\|+\|x_0\|+\|(I+A)^{-1}x_0\|), \quad x \in \mathcal{H}, \quad t>0,$$

ce qui donne (b_1).

3. Démonstration de l'implication: (b)⇒(a).[6] Fixons $t_0>0$. Soit B un sous-ensemble borné quelconque de C. D'après (b_2), pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta_B(\varepsilon) \in]0,1]$ tel que $t \in]0, \delta_B(\varepsilon)]$ implique $\|T_{t_0}x-T_tT_{t_0}x\| \le \varepsilon$ pour tout $x \in B$. Il résulte des lemmes 1 et 3 de Kato [4] que l'opérateur $t^{-1}(I-T_t)$, $t>0$, est monotone,

$$R\left(I+\frac{\lambda}{t}(I-T_t)\right) \supset C \text{ pour } \lambda, t>0$$

et que

$$\left\|\left(I+\frac{\lambda}{t}(I-T_t)\right)^{-1}T_{t_0}x-T_{t_0}x\right\| \le 2\varepsilon\left(1+\frac{2\lambda}{\delta_B(\varepsilon)}\right)$$

pour $x \in B$, $\lambda>0$ et $t \in]0, \delta_B(\varepsilon)]$. Faisant tendre t vers 0, on en obtient l'inégalité:

$$\|(I+\lambda A)^{-1}T_{t_0}x-T_{t_0}x\| \le 6\varepsilon$$

pour $x \in B$ et $\lambda \in]0, \delta_B(\varepsilon)]$ (voir le lemme 1.5 de Brezis et Pazy [2]). D'autre part, puisque l'on a (b_1) et

$$(I+\lambda A)^{-1}=(I+A)^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}I+\frac{\lambda-1}{\lambda}(I+\lambda A)^{-1}\right), \qquad \lambda>0,$$

l'opérateur $(I+\lambda A)^{-1}T_{t_0}$ est compact pour tout $\lambda>0$. Par conséquent, on arrive à (a).

Références

[1] Ph. Bénilan: Une remarque sur la convergence des semi-groupes non linéaires. C. R. Acad. Sc. Paris, **272**, 1182–1184 (1971).

[2] H. Brezis et A. Pazy: Semigroups of nonlinear contractions on convex sets. J. Functional Analysis, **6**, 237–281 (1970).

5) On sait que $-A^0$: $D(A^0)=D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, est le ⟪*générateur infinitésimal*⟫ du semi-groupe $\{T_t\}_{t \ge 0}$.

6) On peut procéder comme dans Bénilan [1].

[3] M. G. Crandall et A. Pazy: On accretive sets in Banach spaces. J. Functional Analysis, **5**, 204–217 (1970).
[4] T. Kato: Note on the differentiability of nonlinear semigroups. Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., **16**, 91–94 (1970).
[5] Y. Kōmura: Differentiability of nonlinear semigroups. J. Math. Soc. Japan, **21**, 375–402 (1969).
[6] A. Pazy: On the differentiability and compactness of semi-groups of linear operators. J. Math. Mech., **17**, 1131–1141 (1968).