82. *Le Bruit Blanc et Calcul Stochastique*

Par Shigeyoshi OGAWA

(Comm. by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., June 3, 1975)

1. Dans la présente note, on s'intéresse à construire une base concrète pour le calcul stochastique concernant le bruit blanc. La nécessité de l'étude tire son origine d'une question primitive; Etant donné un processus aléatoire de la forme $f(B_t)$, où B_t le processus de mouvement brownien à valeurs dans $\boldsymbol{R}^1$ et $f(x)(x \in \boldsymbol{R}^1)$ une fonction réelle de la classe C^2, on considère sa dérivée en t. En appliquant la formule classique de différentiation, on souhaite d'obtenir l'expression comme suit;

$$\frac{d}{dt}f(B_t)=f'(B_t)\cdot\dot{B} \qquad \left(f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)\right), \tag{1}$$

où $\dot{B}$ est la dérivée de B_t, notamment le bruit blanc.

On se demande la légitimité de cette opération, qui dépend évidemment du sens que l'on fournit au terme $f'(B_t)\cdot\dot{B}$. On veut une formalisme de calcul stochastique d'après laquelle l'expression (1) soit valide. Comme on le voit plus tard, ce but se réalise à l'aide de la théorie de B-dérivées et l'intégrale stochastique de type $\mathcal{J}_{1/2}$ introduite et étudiée par l'auteur ([1]–[3]).

2. Soit $\{B_t, t\geqslant 0\}$ le processus de mouvement brownien défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sans perdre la généralité, on va supposer que la valeur $|B_t(\omega)|$ soit finie pour tous t et $\omega \in \Omega$. Soient $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables, à support compact et $\boldsymbol{S}$ celui des fonctions indéfiniment dérivables, à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées. En particulier, étant fixé un intervalle compact $\boldsymbol{T}$ dans $\boldsymbol{R}_+$, on entend par $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n)$ le sous-espace de $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}^{n+1})$ formé par des fonctions de $(n+1)$-variables $F(t, \boldsymbol{x})(t \in \boldsymbol{T}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n)$ qui pour chaque t fixé appartient à la classe $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}^n)$ et à la classe $\mathcal{D}(\boldsymbol{T})$ pour chaque $\boldsymbol{x}$ fixé. On désigne par $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n\,;\Omega)$ (ou par $\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n\,;\Omega)$ resp.) l'ensemble des processus aléatoires généralisés sur $\mathcal{D}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n)$ (ou, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n)$ resp.); un élément X de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n\,;\Omega)$ est, par exemple, une application linéaire, continue de $\mathcal{D}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n)$ dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Remarque. L'ensemble $\mathcal{A}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n)$ introduit dans l'article précédent [3] n'est autre que $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n\,;\Omega)$.

En ce qui concerne la construction d'un processus aléatoire généralisé, on a l'énoncé suivant qui est une variation triviale du "Théorème des Noyaux" dû à L. Schwartz.

Théorème. *Soit $B(u, v)$ une application bilinéaire, séparément continue de $\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)\otimes\mathcal{D}(\boldsymbol{T})$ (ou, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}^n)\otimes\mathcal{D}(\boldsymbol{T})$ resp.) dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Il existe alors un élément X de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n; \Omega)$ (ou, $\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n; \Omega)$ resp.) tel que; $B(u, v)=\langle X, u\cdot v\rangle$* P-p.s. *pour chaque u, v fixés.*

Pour un élément X de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n; \Omega)$, la forme $\langle X, u\cdot v\rangle$ étant linéaire, continue en v pour chaque $u\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ fixé, il existe donc un élément $X.(u)$ de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}; \Omega)$ tel que; $\langle X, u\cdot v\rangle=\langle X.(u), v\rangle$ P-p.s. pour chaque u, v fixés. On l'appelle la coupe temporelle de X. Celle-ci étant définie sauf sur un ensemble négligeable de t, on peut à peine parler de sa valeur en un point de t. Pourtant, il y a des cas où l'on peut l'identifier avec un processus habituel en modifiant les valeurs de $X.(u)$ sur un ensemble négligeable de t. Dans la suite, on comprend par la coupe temporelle une de ses versions convenables, s'il y de nécessité. Il importe de remarquer que cette modification ne change pas le caractère de X en tant qu'élément de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n; \Omega)$.

Définition 1. Un élément X de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n; \Omega)$ est dit B-différentiable pourvu que sa coupe temporelle $X.(u)$ soit uniforment $B^+(\boldsymbol{M}_4)$-différentiable pour chaque $u\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ fixé.

Proposition 1. *Soient X un élément B-différentiable de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n; \Omega)$ (ou bien, $\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n; \Omega)$ resp.) et $\widehat{X.(u)}$ la B-dérivée de $X.(u)(u\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$, ou, $u\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}^n)$ resp.). Alors, pour chaque t fixé, l'application $\widehat{X_t(u)}$ de $\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ (ou, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}^n)$ resp.) dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ est linéaire et continue.*

Ceci posé, la forme $\langle\widehat{X.(u)}, v\rangle=\int\widehat{X_t(u)}v(t)dt$ étant bilinéaire, séparément continue en u, v, elle définit donc un élément $\hat{X}$ de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n; \Omega)$ (ou, $\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n; \Omega)$ si X en est de même) d'après le Théorème; l'élément $\hat{X}$ est tel que $\langle\hat{X}, u\cdot v\rangle=\langle\widehat{X.(u)}, v\rangle$ pour tous u, v. On l'appelle la B-dérivée de X. Les deux propositions suivantes montrent que l'opération $\wedge$ est bien définie comme différentiation;

Proposition 2. (i) *L'opération $\wedge$ est linéaire; pour deux éléments B-différentiables X et Y, on a la relation; $\widehat{(aX+bY)}=a\hat{X}+b\hat{Y}$ où a et b sont des constantes.*

(ii) *Soit X B-différentiable. Pour sa coupe temporelle $X_t(u)$, il existe alors une version $\widetilde{X_t(u)}$, presque sûrement continue en t pour chaque u fixé et telle que $P\{X_t(u)=\widetilde{X_t(u)}\}=1$ pour chaque t.*

Proposition 3. *Pour tout élément B-différentiable X de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n; \Omega)$, l'ordre des opérations $\wedge$ et $\boldsymbol{D}_x^p(=(\partial/\partial x_1)^{p_1}\cdots(\partial/\partial x_n)^{p_n}$, p_i sont des nombres naturels tels que $p_1+\cdots+p_n=p$) est changeable;*

$$\langle\widehat{(D_x^p X)}, \phi\rangle=\langle D_x^p\hat{X}, \phi\rangle \qquad \textit{pour tout } \phi\in\mathcal{D}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n). \tag{2}$$

Exemple. Soit $Y(x)(x\in\boldsymbol{R}^1)$ la fonction d'Heaviside. On considère un processus aléatoire généralisé $Y_B(t, x)=Y(x-B_t)$ défini par

$$(3) \qquad \langle Y_B, u\cdot v\rangle = \int v(s)ds \int_0^\infty u(x+B_t)dx, \qquad v\in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^1),\ v\in\mathcal{D}(\boldsymbol{T}).$$

Alors, il est B-différentiable et on a la relation; $\hat{Y}_B = -\delta_B$ où δ_B est un élément de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n\,;\,\Omega)$ tel que;

$$(4) \qquad \langle \delta_B, u\cdot v\rangle = \int u(B_s)v(s)ds.$$

De plus, il est facile de voir que Y_B est indéfiniment B-différentiable. On verra plus tard la signification probabiliste du processus aléatoire génégalisé δ_B.

Désignons par $\mathcal{S}^m(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n)$ l'ensemble de tout processus aléatoire généralisé X tel qu'il soit m-fois B-différentiable et que la coupe temporelle $\hat{X}_t(u)$ soit Riemann-intégrable sur l'intervalle $\boldsymbol{T}$ au sens de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ pour chaque u fixé.

Définition 2. Pour un élément X de $\mathcal{S}^m(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n)$, le produit $X\cdot(\dot{B})^j$ $(j\leqslant m)$ est un processus aléatoire généralisé sur $\mathcal{D}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n)$ (ou bien, sur $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n)$ quand X en est de même) défini par

$$(5) \qquad \langle X\cdot(\dot{B})^j, u\cdot v\rangle = \frac{1}{2^{j-1}}\int \widehat{X_t(u)}^{(j-1)}v(t)dB_t, \qquad (\hat{X}^{(0)}=X),$$

où l'intégrale stochastique est comprise au sens de $\mathcal{I}_{1/2}$ (voir [1], [2]).

La définition est introduite par l'auter ([3]) en vue d'appliquer la théorie à l'étude de l'équation de Schrödinger. D'après la propriété de l'intégrale stochastique, l'expression (5) est équivalente à la

$$(5)' \qquad \langle X\cdot(\dot{B})^j, u\cdot v\rangle = \frac{1}{2^j}\langle \hat{X}^{(j)}, u\cdot v\rangle + \frac{1}{2^{j-1}}\int \widehat{X_t(u)}^{(j-1)}v(t)d^0Bt$$

où l'intégrale stochastique $\int d^0B$ entend celle de Itô.

Proposition 4. *Si deux éléments X, Y de $\mathcal{S}^1(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n)$ sont équivalents au sens de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n\,;\,\Omega)$; c'est-à-dire que pour tout $\phi\in\mathcal{D}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n)$, $E\{|\langle X-Y,\phi\rangle|^2\}=0$. Alors, les deux $X\cdot\dot{B}$ et $Y\cdot\dot{B}$ en sont de même.*

3. On va voir dans la suite commen notre calcul s'applique à des cas concrets. Tout d'abord, on constate que la discussion déroulée au paragraphe 2 s'applique aussi pour le cas des processus aléatoires appartenant à la classe $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T};\Omega)$, ou à $\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{T};\Omega)$; En effet, mettons un élément X de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T};\Omega)$, alors on peut l'identifier avec l'élément $(\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{R^1}(x_i))\cdot X$ de $\mathcal{D}'(T\times\boldsymbol{R}^n;\Omega)$, qui ne dépend pas des variables $x_1,\cdots,x_n$. Dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{S}^1(\boldsymbol{T})=\mathcal{S}^1(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^n)\cap\mathcal{D}'(\boldsymbol{T};\Omega)$ n'est autre que celui des processus aléatoires, uniformement $B^+(\boldsymbol{M}_4)$-différentiables sur l'intervalle $\boldsymbol{T}$. De cette considération, on voit que l'expression (1) est valide comme équation d'éléments de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T};\Omega)$, si le processus aléatoire $f(B_t)$ est uniformement $B^+(\boldsymbol{M}_4)$-différentiable.

L'expression (1) se généralise au cas où $f(x)$ est une distribution; Soit $T(x)$ un élément de $\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{R}^1)$. On lui associe une application bilinéaire $T_B(t,x)$ de $\mathcal{D}(\boldsymbol{T})\otimes\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}^1)$ dans $\mathcal{L}^0(\Omega)$ définie par

(6) $$\langle T_B, u\cdot v\rangle = \langle T, u_{-B}\cdot v\rangle \qquad (u\in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}^1),\ v\in \mathcal{D}(\boldsymbol{T})),$$
où
$$u_{-B}(x)=u(x+B_t).$$
Toute distribution étant d'ordre finie, il est facile de voir que la forme (6) définit une application de $\mathcal{D}(\boldsymbol{T})\otimes \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}^1)$ dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ qui est séparément continue en u, v. Autrement dit, elle définit un élément T_B de $\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^1;\Omega)$ d'après le Théorème. On l'appelle *la B-shift de T*. Car la B-shift T_B satisfait toujours à la relation $\hat{T}_B = -\boldsymbol{D}_x(T_B)$, l'énoncé suivant résulte aussitôt de la proposition 3.

Proposition 5. *La B-shift T_B appartient à la classe $\mathcal{S}^\infty(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^1)$.*

Considérons maintenant un élément $T(t,x)$ de $\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^1)$ tel que sa coupe temporelle $T_t(u)$ s'identifie avec une fonction, différentiable au sens usuel. Encore par la formule (6), on peut lui associer un élément T_B de $\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^1;\Omega)$. L'énoncé suivant est une interprétation de la formule de Itô en terme de processus aléatoires généralisés.

Proposition 6. *Soit $T_B(t,x)$ la B-shift d'une distribution T sur $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R}^1)$, dont la coupe temporelle est différentiable en t au sens usuel. Alors, on a la relation*

(7); $$\boldsymbol{D}_tT_B = (\boldsymbol{D}_tT)_B - (\boldsymbol{D}_xT_B)\cdot\dot{B} = (\boldsymbol{D}_tT)_B + 2T_B\cdot(\dot{B})^2,$$
où $(\boldsymbol{D}_tT)_B$ est la B-shift de la distribution $\boldsymbol{D}_tT$.

4. Applications. (A) Le temps local brownien de P. Lévy. Soit $L_x(t)$ le temps local brownien au point $x(\in\boldsymbol{R}^1)$ jusqu'au moment $t(\geqslant 0)$; $L_x(t)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\dfrac{1}{2\varepsilon}$ mesure $\{s\leqslant t,\ x\leqslant B_s < x+\varepsilon\}$. Il n'est pas difficile de vérifier que sa dérivée $\boldsymbol{D}_tL_x(t)$ peut s'identifier avec la B-shift de la distribution $(1/2)\delta$ (voir Exemple dans le paragraphe 2);

(8) $$\left\langle \frac{1}{2}\delta_B, u\cdot v\right\rangle = -\langle L.(\cdot), u\cdot\dot{v}\rangle,$$
pour tous $u\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^1)$ et $v\in\mathcal{D}(\boldsymbol{T})$.

La relation (8) peut s'écrire comme suit

(8)′ $$\left\langle \frac{1}{2}\delta_B, u\cdot v\right\rangle = -\langle L.(\dot{v}), u\rangle,$$

où $L.(v)$ est un élément de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^1;\Omega)$ tel que; $\langle L.(\cdot), u\cdot v\rangle = \langle L.(v), u\rangle$.

D'autre part, $L_x(t)$ étant une fonction presque sûrement continue en t et x, on peut parler de la valeur de $L_x(\dot{v})$ à un point x indiqué. Ce fait, avec l'égalité (8)′, légitime d'identifier $(1/2)\delta_B$ avec $\boldsymbol{D}_tL_x(t)$ en tant qu'éléments de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T};\Omega)$; c'est-à-dire que

(9) $$\left\langle \frac{1}{2}\delta_B(\cdot,x), v\right\rangle = -\int L_x(t)\dot{v}(t)dt.$$

(B) La formule de H. Tanaka; Appliquons la formule (7) à la B-shift de la distribution $xY(x)$. Puisqu'on a $\boldsymbol{D}_x(xY(x))=Y(x)$, cela implique l'égalité;

(7)′ $$\boldsymbol{D}_tB_\cdot^+(x) = (1-Y_B)\cdot\dot{B}, \qquad \text{où } B_t^+(x) = B_t + (xY(x))_B.$$

Du fait que la B-dérivée de $-Y_B$ s'identifie avec $2D_tL_x(t)$, on constate que l'égalité (7)′ est une interprétation de la formule de H. Tanaka (voir [4]).

Références

[1] Ogawa, S.: On a Riemann-definition of the stochastic integral. I, II. Proc. Japan Acad., **46**(2), 153–161 (1970).
[2] ——: A partial differential equation with the white noise as a coefficient. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw Geb., **28**, 53–71 (1973).
[3] ——: Equation de Schrödinger et Equation de Particule Brownienne (1975) (à paraître dans J. Math. of Kyoto Univ.).
[4] McKean, H. P.: Stochastic Integrals. Academic Press, New York (1969).