110. *Topologische Begründung der ebenen Geometrie ohne Benutzung des Begriffes der Zahlenebene.*

Von Wilhelm Süss.

Kagoshima Kotogakko.

(Rec. June 18, 1927. Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., July 12, 1927.)

D. Hilbert[1] hat das *Helmholtz-Lie*sche Problem der gruppentheoretischen Begründung der Geometrie dadurch ganz wesentlich gefördert, dass er die Gruppe der Bewegungen der ebenen Geometrie durch drei einfache Axiome innerhalb der Gruppe der topologischen Selbstabbildungen der Ebene gekennzeichnet hat, ohne irgendeine Voraussetzung über die Differenzierbarkeit der die Bewegungen vermittelnden Funktionen zu machen. Bei Beantwortung einer von Hilbert dabei gestellten Frage wurde ich zu einer die *Hilbert*sche umfassenden Darstellung geführt.[2] Von *Hilbert* wird die Ebene von vornherein als zweidimensionale Zahlenmannigfaltigkeit oder deren topologisches Aequivalent eingeführt, ein Umstand, der *H. Poincaré* veranlasst hat, auch die *Hilbert*sche Formulierung noch nicht vollkommen befriedigend zu heissen. *R. L. Moore*[3] hat deshalb einen Aufbau der ebenen Geometrie durchgeführt, der die Vorzüge des *Hilbert*schen vor seinen Vorgängern teilt, aber den Begriff der " Zahlenebene " in den Axiomen vermeidet. Hier will ich einen Weg skizzieren, auf dem man das Gleiche für meine oben genannte[2] Variante der *Hilbert*schen Begründung erreichen kann.[4]

Unserm Aufbau legen wir mit *Moore* die Begriffe *Punkt, Umgebung* und *Bewegung* zugrunde. Sie sind durch folgendes Axiomensystem definiert: Gegeben sei eine Menge von Punkten, aus der gewisse Teilmengen als Umgebungen herausgehoben werden. Eine Bewegung sei eine ein-eindeutige Abbildung der Punktmenge auf sich selbst. Wir fordern:

1) Es existiert mindestens eine Umgebung.

2) Sind R und K zwei Umgebungen, R', K' ihre Vereinigungs-

---

1) Math. Ann. **56**, 381-422; oder Grundlagen der Geometrie, Anhang IV.

2) Tôhoku Math. Journ. **26**, 365-385, Japan. Journ. Math. **2**, 91-99.

3) American Journ. Math. **41**, 299-319.

4) Zur Behandlung der mir schon vorher bekannten Problemstellung wurde ich durch eine freundliche Zuschrift von Herrn *F. Schur* in Breslau veranlasst.

mengen resp. mit ihren Rändern,[5] und ist R' Teilmenge von K', so ist R Teilmenge von K.

3) Enthalten die Umgebungen R_1 und R_2 den Punkt O, so existiert eine Umgebung R derart, dass R' in R_1 und R_2 enthalten ist und seinerseits O enthält.

4) Wenn R_2' Teilmenge von R_1 ist, so ist R_1-R_2' eine nicht-leere zusammenhängende Menge.

5) Zu je zwei Umgebungen R_1 und R_2 existiert eine Umgebung, die R_1' und R_2' enthält.

6) Jede einfach geschlossene Kurve ist Rand einer Umgebung.

7) Sind L und N zwei abgeschlossene, begrenzte[6] Mengen ohne gemeinsamen Punkt, so existiert zu *jedem* beliebigen Punkt O eine ihn enthaltende Umgebung K von folgender Art: Ist P ein Punkt von K, so kann *jede* Umgebung, die Punkte aus L *und* N enthält, durch eine Bewegung, die einen Punkt von L nach O bringt, in eine O und P enthaltende Punktmenge transformiert werden.

8) Jede Bewegung führt eine Umgebung wieder in eine Umgebung über.

9) a) Es sei $t_1, t_2, \ldots\ldots$ eine Folge von Bewegungen, für die Punktfolge $A_i = t_i(A)$ einen Häufungspunkt $\overline{A}$ hat. Ist B ein bestimmter von A verschiedener Punkt, so existieren zwei Umgebungen $U(\overline{A})_B$ und $V(\overline{A})_B$, sodass $B_i = t_i(B)$ nie in $U(\overline{A})_B$ und stets in $V(\overline{A})_B$ enthalten ist für $n > N$.

b) Wenn B gegen A konvergiert, so konvergiert auch $V(\overline{A})_B$ gegen $\overline{A}$, d. h. jede Umgebung von $\overline{A}$ enthält eine Umgebung $V(\overline{A})_B$.

c) Zu jeder Umgebung $U_1(P)$ existiert eine Umgebung $U_2(P)$, sodass jeder Punkt von $U_1(P)$ bei einer Drehung um P (d. h. Bewegung mit Fixpunkt P) in $U_2(P)$ liegt; es lässt sich $U_2(P)$ so wählen, dass es mindestens eine Drehung um P gibt, welche einen auf dem Rand von $U_1(P)$ gelegenen Punkt in einen Punkt des Randes von $U_2(P)$ überführt.

10) Die inverse Operation zu einer Bewegung ist wieder eine Bewegung.

11) Die Bewegungen bilden eine Gruppe.

12) R_1, R_2 seien von den einfachen geschlossenen Kurven I_1, I_2 begrenzt. R_1' R_2' seien ohne gemeinsamen Punkt. Es gebe drei einfache Kurvenbogen, die drei Punkte A_1, B_1, C_1 von I_1 bezw. mit A_2, B_2, C_2 von

---

5) Gestrichene grosse Buchstaben sollen stets diese Bedeutung haben.

6) D. h. es existiert z. B. eine Umgebung $\overline{L}$, sodass $\overline{L} < \overline{L}'$ ist.

I_2 verbinden, ohne miteinander und mit R_1', R_2' andere Punkte gemein zu haben. Für die Bewegung m seien R_1' und $m(R_2')$ punktfremd und es gebe drei Kurvenbogen von A_1, B_1, C_1 bezw. nach $m(A_2)$, $m(B_2)$, $m(C_2)$. Dann gibt es drei solche Bogen, die miteinander und mit R_1' und $m(R_2')$ keine weiteren Punkte gemein haben. (Aequivalent der Indikatrixerhaltung.)

Diese Axiome stimmen bis auf 9) mit denen *Moores* überein. Das Axiom 9) *Moores*, das dem Axiom III *Hilberts* betr. die Abgeschlossenheit der Bewegungsgruppe entspricht, habe ich hier auf analoge Weise ersetzt, wie es a. a. O.[2] mit dem Axiom III *Hilberts* geschah. Da das *Moore*sche Theorem 4 eine Folge von 7) und 9) ist, so lassen die dortigen Betrachtungen bis zu Theorem 30 incl. unverändert durchführen. An dieser Stelle wird ein weiteres Axiom nötig, das meiner Erweiterung des Axioms II von *Hilbert* entspricht (Axiom B[2]) :

9′ a) Hat ein Kreis unendlich viele Punkte, so ist seine abgeschlossene Hülle eine einfache geschlossene Kurve, der "wahre Kreis."

9′ b) Es gilt Axiom D, a. a. O.[2]

Hiernach werden die Begriffsbildung "neue Bewegungen" und diejenigen Betrachtungen zugänglich, durch die ich a. a. O.[2] die von *Moore* benötigten Entwicklungen der §§ 1—15 von *Hilbert* ersetzt habe. Somit kann auch das Ende der *Moore*schen Arbeit übernommen werden. Es zeigt sich also : *Auf Grund unserer Axiome 1)—12) incl. 9′) lassen sich die den elementaren entsprechenden "neuen Bewegungen" einführen, vermittelst deren man die elementaren Gebilde der Geometrie konstruieren und deren zum Aufbau der Geometrie notwendige Eigenschaften gewinnen kann. Die benutzten Axiome sind voneinander logisch unabhängig. Der so entstehende Aufbau umfasst denjenigen Moores.*

A. a. O.[2] habe ich auch eine topologische Grundlegung der Lehre von Kongruenz und Symmetrie in der Ebene durchgeführt. Die Ausschaltung des Begriffs der Zahlenebene aus den dortigen Axiomen dürfte auf ähnliche Weise möglich sein, wie es oben geschehen ist. Überhaupt kann man beim heutigen Stande der Topologie bei allen zweidimensionalen geometrischen Systemen erwarten, dass sie sich verhältnismässig leicht auf eine den Begriff der Zahlenmannigfaltigkeit zunächst vermeidende Weise topologisch aufbauen lassen, während zu befürchten ist, dass mehrdimensionale Systeme ungleich grössere Schwierigkeiten bereiten werden. Auf die Erreichbarkeit des genannten Zieles für die a. a. O.[7] behandelte Geometrie auf der Kugelfläche hoffe ich gelegentlich zurückkommen zu können.

---

7) Tôhoku Math. Journ. **27**, 213-242 und **28** (erscheint nächstens).