PAPERS COMMUNICATED

34. *Über die zugehörige Gruppe eines endlichen Ringes.*[1]

Von Kenjiro SHODA.

(Rec. March 1, 1929. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1929.)

Wenn man einen Ring $\mathfrak{o}$ betrachtet, der den *Doppelkettensatz für Rechtsideale* erfüllt, so wird nach Herrn E. Artin (Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Abhandlungen aus dem Math. Seminar zu Hamburg, Bd. 5) die Existenz des maximalen nilpotenten Ideals $\mathfrak{n}$ bewiesen, dessen Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ halbeinfach, also die direkte Summe von einfachen Ringen $\mathfrak{o}$ ist. Einen maximalen nilpotenten Unterring $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}^{\alpha}=0$, von $\mathfrak{o}$ kann man daher durch die folgenden drei Sätze konstruieren. 1) Ist $\mathfrak{m}'$ ein maximaler nilpotenter Unterring eines Restklassenringes $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ nach einem nilpotenten Ideal $\mathfrak{n}$, so bildet die Gesamtheit der Elemente aus $\mathfrak{o}$, die in den Restklassen aus $\mathfrak{m}'$ enthalten sind, einen maximalen nilpotenten Unterring von $\mathfrak{o}$, und jeder maximale nilpotente Unterring entsteht so. 2) Ist $\mathfrak{o}$ die direkte Summe von Idealen $\mathfrak{o}_i$ und $\mathfrak{m}_i$ ein maximaler nilpotenter Unterring von $\mathfrak{o}_i$, so ist die direkte Summe von $\mathfrak{m}_i$ ein maximaler nilpotenter Unterring von $\mathfrak{o}$, und jeder maximale nilpotente Unterring von $\mathfrak{o}$ entsthet so. 3) Ist $\mathfrak{o}$ einfach, so ist $\mathfrak{o}$ nach einem Wedderburnschen Satz mit einem Matrizenring $\sum KE_{ij}$ isomorph, wo K einen im allgemeinen nichtkommutativen Körper bedeutet. $\sum\limits_{i<j} KE_{ij}$ bzw. $\sum\limits_{i>j} KE_{ij}$ bildet einen maximalen nilpotenten Unterring von $\mathfrak{o}$.

Aus dieser Konstruktion folgt—wie man in 3) sieht—: Das maximale nilpotente Ideal in $\mathfrak{o}$ ist der Durchschnitt aller maximalen nilpotenten Unterringe von $\mathfrak{o}$.

Die Gesamtheit der Elemente P, die den Bedingungen $P\mathfrak{m}<\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}P<\mathfrak{m}$ für einen maximalen nilpotenten Unterring $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{o}$ genügen, bildet einen Unterring $\mathfrak{p}$ (Normalisator von $\mathfrak{m}$). Dann besteht $\mathfrak{m}$ aus den sämtlichen nilpotenten Elementen aus $\mathfrak{p}$. Daher ist $\mathfrak{p}/\mathfrak{m}$ die direkte Summe von Körpern. Den Normalisator des oben konstruierten maximalen nilpotenten Unterring kann man auch wie oben konstruieren, da die 1) und 2) entsprechenden Sätze für Normalisatoren gelten und der Normalisator von $\sum\limits_{i<j} KE_{ij}$ (Vgl. 3) gleich $\sum\limits_{i\leqq j} KE_{ij}$ ist. Wenn man ferner das Bestehen des *Vielfachenkettensatz* für Rechtsideale in einem maximalen nilpotenten Unterringe $\mathfrak{m}$ voraussetzt, so kann man beweis-

1) Die ausführiche Darstellung dieser Arbeit wird in Math. Ann. erscheinen.

en, daß die Gesamtheit der mit $\mathfrak{m}$ vertauschbaren Einheiten die zugehörige Gruppe des Normalisators $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{m}$ bildet. Dabei soll unter der zugehörigen Gruppe eines Ringes die Gesamtheit der Einheiten des Ringes verstanden werden.

Das Hilfsmittel für den Uebergang von Ring zu Gruppe bildet der Begriff des Strahls, den ich in einer Arbeit (Ueber die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe, Math. Ann. Bd. 100) eingeführt habe. Ausser den dort bewiesenen Sätze gilt: Der Strahl eines Ringes modulo einem nilpotenten Unterringe bildet eine Untergruppe der zugehörigen Gruppe des Ringes. Durch diesen Satz kann man die oben erhaltenen Resultate über nilpotente Unterringe in die Theorie der zugehörigen Gruppe übertragen. Interessant ist der Fall, wo der Ring endlich ist. Ein *endlicher* Ring heisse ein *p-Ring*, wenn die Anzahl der Elemente eine Primzahlpotenz ist. Dann gilt: Ein endlicher Ring ist stets die direkte Summe von p-Ringen. Man kann nun beweisen, daß der Strahl eines p-Ringes modulo einem maximalen nilpotenten Unterringe die Sylowgruppe der zugehörigen Gruppe ist, was man leicht erkennen kann, wenn man die Anzahl der Elemente des maximalen nilpotenten Unterringes ausrechnet und mit der Ordnung der zugehörigen Gruppe vergleicht. Aus einem Satz über Sylowgruppen folgt daher: Alle maximalen nilpotenten Unterringe eines endlichen Ringes sind mit einander konjugiert.

Aus den oben erhaltenen Resultaten über nilpotente Unterringe erhält man die folgenden leichtbeweisbaren Sätze. Der Strahl eines p-Ringes modulo dem maximalen nilpotenten Ideal ist der Durchschnitt aller Sylowgruppen der zugehörigen Gruppe. Die im Normalisator eines maximalen nilpotenten Unterringes eines p-Ringes enthaltenen Einheiten bilden den Normalisator der entsprechenden Sylowgruppe in der zugehörigen Gruppe. Der Index des Normalisators einer Sylowgruppe in der zugehörigen Gruppe eines p-Ringes ist gleich der Anzahl der verschiedenen Sylowgruppen, also gleich der Anzahl der maximalen nilpotenten Unterringe und wird durch

$$\Pi_i \left(p^{m_i n_i}-1\right)\left(p^{m_i(n_i-1)}-1\right)\ldots\left(p^{m_i}-1\right)\Big/\left(p^{m_i}-1\right)^{n_i}$$

gegeben, wobei der Restklassenring nach dem maximalen nilpotenten Ideal mit der direkten Summe von vollständigen Matrizenringen des Grades n_i im Galoisschen Felde $GF\left(p^{m_i}\right)$ isomorph sei, da ein endlicher Körper stets kommutativ und daher ein Galoisscher Feld ist (Satz von Wedderburn, A theorem on finite algebra, Transaction of the American Math. Soc. Bd. 6).