PAPERS COMMUNICATED

30. *Über die Einheitengruppe eines endlichen Ringes II.*

Von Kenjiro SHODA.

(Rec. March 1, 1930. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1930.)

In dem ersten Teil dieser Arbeit[1] habe ich bewiesen, daß der Strahl eines p-Ringes modulo einem maximalen nilpotenten Unterring eine Sylowgruppe der Einheitengruppe des Ringes bildet. In der vorliegenden werde ich zeigen, daß die Reihe von Ableitungen (Kommutatorgruppen) der Sylowgruppe nichts anderes als die Reihe von Strahlen modulo den Ableitungen (Kommutatoridealen) des maximalen nilpotenten Unterringes ist.

Wir betrachten zunächst einen allgemeinen Ring $\mathfrak{o}$, der nicht notwendig endlich zu sein braucht. Durchlaufen zwei Elemente A und B alle Elemente des Ringes $\mathfrak{o}$, so nennen wir den durch $AB-BA$ erzeugten Ring $\mathfrak{k}$, den Kommutatorring von $\mathfrak{o}$, der nach der Definition durch $\mathfrak{o}$ eindeutig bestimmt wird. Der Durchschnitt[2] aller $\mathfrak{k}$ enthaltenden zweiseitigen Ideale bzw. Rechtsideale heisst das Kommutatorideal bzw. Kommutatorrechtsideal von $\mathfrak{o}$ und wird mit $\mathfrak{k}^*$ bzw. $\mathfrak{r}$ bezeichnet. Dann ist ersichtlich $\mathfrak{k}^*=(\mathfrak{k}, \mathfrak{o}\mathfrak{k}\mathfrak{o})$, $\mathfrak{r}=(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}\mathfrak{o})$. Falls $\mathfrak{o}$ das Einheitselement besitzt, so ist $\mathfrak{k}^*=\mathfrak{o}\mathfrak{k}\mathfrak{o}$, $\mathfrak{r}=\mathfrak{k}\mathfrak{o}$.

Satz 1. *Der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{k}^*$ von $\mathfrak{o}$ nach dem Kommutatorideal $\mathfrak{k}^*$ ist kommutativ und jedes Ideal $\mathfrak{h}$ mit dem kommutativen Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{h}$ enthält das Kommutatorideal $\mathfrak{k}^*$ von $\mathfrak{o}$.*

Sind A und B zwei Elemente aus $\mathfrak{o}$, so ist nach der Definition von $\mathfrak{k}$ stets $AB=BA$ (mod $\mathfrak{k}$, also $\mathfrak{k}^*$). Ist nun $AB=BA$ (mod $\mathfrak{h}$) für jedes A, B aus $\mathfrak{o}$, so ist $AB-BA=0$ (mod $\mathfrak{h}$) und daher $\mathfrak{k}=0$ (mod $\mathfrak{h}$). Nach der Definition von $\mathfrak{k}^*$ ist also $\mathfrak{k}^*$ in $\mathfrak{h}$ enthalten.

Es sei von jetzt an $\mathfrak{o}$ ein Ring mit dem Einheitselement E.

Satz 2. *Der Durchschnitt der Einheitengruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{o}$ und des Strahls $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{u}\}$ modulo einem Unterring $\mathfrak{u}$ bildet eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, falls $\mathfrak{u}$ den Vielfachenkettensatz für Rechtsideale erfüllt.*[3]

1) Math. Ann. Bd. **102** (1929), S. 273-282, Vgl. die Voranzeige, Proc. **5** (1929) unter dem Titel: Über die zugehörige Gruppe eines endlichen Ringes.

2) Die Existenz dieses Durchschnitts soll vorausgesetzt werden. Sie folgt daraus, daß $\mathfrak{o}$ den Vielfachenkettensatz für Ideale bzw. Rechtsideale erfüllt.

3) Wenn $\mathfrak{u}$ den Vielfachenkettensatz nicht erfüllt, so kann dieser Durchschnitt keine Gruppe bilden. Beispiel: $\mathfrak{o}$ sei der rationale Körper, $\mathfrak{u}$ der Integritätsbereich. Dann ist der Durchschnitt von $\mathfrak{G}$ und $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{u}\}$ gleich der Gesamtheit der von Null verschiedenen Zahlen aus $\mathfrak{u}$, die bekanntlich keine Gruppe bildet.

Es ist klar, daß das Produkt je zweier Elemente aus dem Strahl $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{u}\}$ wieder im Strahl enthalten ist. Zum Beweis des Satzes haben wir also nur zu zeigen, daß das Reziprok jeder Einheit aus dem Strahl wieder im Strahl enthalten ist. Ist $E+A$ eine Einheit aus $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{u}\}$ und zwar A in $\mathfrak{u}$ enthalten, so ist $(E+A)\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{u}$ enthalten. Also ist $(E+A)\mathfrak{u}$ ein Rechtsideal von $\mathfrak{u}$. Nach der Voraussetzung muss $(E+A)^{\alpha+1}\mathfrak{u}=(E+A)^{\alpha}\mathfrak{u}$ für ein geeignetes α sein. Da $(E+A)^{\alpha}$ eine Einheit ist, so folgt daraus $(E+A)\mathfrak{u}=\mathfrak{u}$. Es gibt daher ein Element A' in $\mathfrak{u}$, das der Gleichung $(E+A)A'=-A$ genügt, da $-A$ in $\mathfrak{u}$ liegt. Dann ist $(E+A')$ das Reziprok von $(E+A)$. Denn es ist $(E+A)(E+A')=E+A+(E+A)A'=E$. Da $(E+A)$ eine Einheit ist, so ist $(E+A')$ auch eine Einheit und zwar ist $(E+A')(E+A)=E$.

Satz 3. *Es sei* $\mathfrak{r}$ *das Kommutatorrechtsideal eines Unterringes* $\mathfrak{u}$ *von* $\mathfrak{o}$, *wobei* $\mathfrak{u}$ *den Vielfachenkettensatz für Rechtsideale erfüllt. Der Durchschnitt* $\mathfrak{N}$ *der Einheitengruppe* $\mathfrak{G}$ *und des Strahls* $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{r}\}$ *bildet einen Normalteiler der Untergruppe* $\mathfrak{U}$ *vou* $\mathfrak{G}$ *und enthält die Kommutatorgruppe von* $\mathfrak{U}$, *wo* $\mathfrak{U}$ *die Untergruppe von* $\mathfrak{G}$ *bedeutet, die dem Durchschnitt von* $\mathfrak{G}$ *und* $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{u}\}$ *gleich ist.*

Für jede Einheit R aus $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{r}\}$ ist $R\mathfrak{r}$ ein Rechtsideal von $\mathfrak{u}$. Da $\mathfrak{u}$ den Vielfachenkettensatz für Rechtsideale erfüllt, so folgt hieraus wie beim Beweis des Satzes 2, $R\mathfrak{r}=\mathfrak{r}$ und, daß $\mathfrak{N}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{U}$ bildet.

Es ist $U\mathfrak{k}U^{-1}=\mathfrak{k}$ für jede Einheit U aus $\mathfrak{U}$. Denn der Kommutatorring $\mathfrak{k}$ wird durch die Elemente von der Gestalt $AB-BA$ erzeugt, wo A und B in $\mathfrak{u}$ enthalten, da U die Gestalt $E+C$ mit einem Element C aus $\mathfrak{u}$ hat. Hieraus folgt aber $U\{\mathfrak{o}, \mathfrak{k}\}U^{-1}=\{\mathfrak{o}, \mathfrak{k}\}$. Nach der Definition von $\mathfrak{r}$ ist daher $U\{\mathfrak{o}, \mathfrak{r}\}U^{-1}=\{\mathfrak{o}, \mathfrak{r}\}$ und $U\mathfrak{N}U^{-1}=\mathfrak{N}$. Daher ist $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{U}$.

Aus $AB=BA \pmod{\mathfrak{r}}$ folgt $(E+A)(E+B)=(E+B)(E+A) \pmod{\mathfrak{r}}$. Hieraus folgt ferner $(E+A)(E+B)(E+A)^{-1}(E+B)^{-1}=E \pmod{\mathfrak{r}}$, da $\mathfrak{r}$ ein Rechtsideal ist und das Reziprok $(E+A)^{-1}$ bzw. $(E+B)^{-1}$ im Strahl $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{u}\}$ enthalten ist. D.h. die Kommutatorgruppe $\mathfrak{K}^*$ von $\mathfrak{U}$ ist in $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{r}\}$, also in $\mathfrak{N}$ enthalten, was zu beweisen war.

Satz 4. *Der Strahl* $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{k}^*\}$ *modulo dem Kommutatorideal* $\mathfrak{k}^*$ *eines nilpotenten Unterringes* $\mathfrak{u}$ *von* $\mathfrak{o}$ *bildet die Kommutatorgruppe der Gruppe* $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{u}\}$[1)]

1) Der Strahl modulo einem nilpotenten Unterring bildet stets eine Untergruppe der Einheitengruppe. Vgl. Satz 2 im ersten Teil, 1).

Falls $\mathfrak{u}$ nicht nilpotent ist, so kann die Kommutatorgruppe $\mathfrak{K}^*$ eine echte Untergruppe des Durchschnitts $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ und $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{k}^*\}$ sein. Beispiel: Es sei $\mathfrak{o}=\mathfrak{u}$ ein vollständiger Matrizenring des Grades 2 modulo 2. Die Einheitengruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{o}$ besitzt dann die zyklische Kommutatorgruppe $\mathfrak{K}^*$ von der Ordnung 3 und vom Index 2. Es ist aber, wie man leicht beweisen kann, $\mathfrak{K}=\mathfrak{U}=\mathfrak{G}$.

Jedes Element aus $\mathfrak{K}^*$ hat die Gestalt $E+A$, wo A zu $\mathfrak{u}$ angehört. Den Durchschnitt aller Ideale, die alle solche Elemente A enthält, bezeichnen wir mit $\mathfrak{h}$. Der Strahl $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{h}\}$ ist dann nach Satz 3 in $\mathfrak{K}=\{\mathfrak{o}, \mathfrak{k}^*\}$ enthalten, da $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{k}^*$ enthalten ist. Also haben wir jetzt nur zu zeigen, daß $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{H}=\{\mathfrak{o}, \mathfrak{h}\}$ enthalten ist. Da $\mathfrak{H}$ die Kommutatorgruppe $\mathfrak{K}^*$ enthält, so ist die Faktorgruppe $\mathfrak{U}/\mathfrak{H}$ kommutativ, d.h. es ist $(E+A)(E+B)=(E+B)(E+A) \pmod{\mathfrak{h}}$, da $\mathfrak{h}$ ein Ideal ist. Hieraus folgt $AB-BA=0 \pmod{\mathfrak{h}}$ und, da $E+A$ für jedes A aus $\mathfrak{u}$ eine Einheit ist, daß der Kommutatorring und auch das Kommutatorideal $\mathfrak{k}^*$ in $\mathfrak{h}$ enthalten. Daher ist $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{H}$ enthalten, w.z.b.w.

Aus den Sätzen 3 und 4 folgt unmittelbar

Zusatz. *Das Kommutatorideal eines nilpotenten Ringes fällt mit dem Kommutatorrechtsideal zusammen.*

Interessant ist der Fall, daß $\mathfrak{o}$ ein p-Ring ist. Dann gilt

Satz 5. *Ist $\mathfrak{o}$ ein p-Ring, $\mathfrak{m}=\mathfrak{k}_0$ ein maximaler nilpotenter Unterring von $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{k}_i$ das Kommutatorideal von $\mathfrak{k}_{i-1}$, so bildet $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{k}_1\}$, $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{k}_2\}$, $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{k}_3\}$, ... die Reihe von Kommutatorgruppen der Sylowgruppe $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$ der Einheitengruppe von $\mathfrak{o}$.*

Bei der ausführlichen Konstruktion des Kommutatorringes wird es manchmal bequem sein zu bemerken: Besteht ein Ring aus den Elementen von der Gestalt $\sum_i Z_i A_i$, wo Z_i zum Zentrum des Ringes angehört,[1] so wird der Kommutatorring durch die Elemente von der Gestalt $\sum_{i,j} Z_i Z_j (A_i A_j - A_j A_i)$ erzeugt.

Wir betrachten nun einen primären Ring $\mathfrak{o}$,[2] der einem vollstandigen Matrizenring des Grades m in einem *kommutativen* vollständig primären Ring $\mathfrak{p}$ isomorph ist. D.h. $\mathfrak{o}=\sum \mathfrak{p} E_{ij}$, wo $E_{ij}E_{kl}=E_{il}$ für $j=k$ und $=0$ für $j \neq k$; E_{ij} mit $\mathfrak{p}$ elementweise vertauschbar ist. Bedeutet $\mathfrak{r}$ das maximale nilpotente Ideal von $\mathfrak{p}$, welches zugleich der maximale nilpotente Unterring von $\mathfrak{p}$ ist, so bildet $\sum_{i \geqq j} \mathfrak{r} E_{ij} + \sum_{i<j} \mathfrak{p} E_{ij}$ einen maximalen nilpotenten Unterring $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{o}$.[3]

1) Man kann hyperkomplexe Grössen und endliche Ringe stets in dieser Form ausdrücken.

2) Zur Definition des primären bzw. vollständig primären Ringes vgl. E. Artin, Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Abh. aus dem Math. Seminar, Hamburg, **5** (1927), 251-260. Die Artinsche Definition ist äquivalent mit der folgenden, wenn man das Bestehen des Doppelkettensatzes für Rechtsideale voraussetzt. Ein Ring mit dem Einheitselement heisst primär, wenn der Restklassenring nach dem maximalen nilpotenten Ideal zweiseitig einfach ist. Ein Ring mit dem Einheitselement heisst vollständig primär, wenn der Restklassenring nach dem maximalen nilpotenten Ideal einen im allgemeinen nichtkommutativen Körper bildet.

3) Vgl. die Konstruktion des maximalen nilpotenten Unterringes in §1 im ersten Teil 1).

Man kann nun nach der obigen Bemerkung leicht die Reihe von Kommutatoridealen von $\mathfrak{m}$ konstruieren.

Ist $m=1$, so ist $\mathfrak{o}=\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}=\mathfrak{r}$ und das Kommutatorideal von $\mathfrak{m}$ besteht aus Null.

Ist $m=2$, so ist das Kommutatorideal von $\mathfrak{m}$ gleich $\mathfrak{k}_1=\mathfrak{r}^2E_{21}+\mathfrak{r}(E_{11}+E_{22})+\mathfrak{r}E_{12}$, $\mathfrak{k}_2=\mathfrak{r}^3(E_{11}-E_{22})$, welches kommutativ ist, also besteht das Kommutatorideal von $\mathfrak{k}_2$ aus Null.

Es sei $m\geqq 3$ und $\mathfrak{m}^{2^{\sigma-1}}\neq 0$, $\mathfrak{m}^{2^\sigma}=0$. Dann kann man beweisen: Ist $\mathfrak{k}_i$ das Kommutatorideal von $\mathfrak{m}^{2^{i-1}}$, so bildet $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{k}_{\sigma-1}, \mathfrak{k}_\sigma$ die Reihe von Kommutatoridealen von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{k}_i$ ist stets ein Ideal in $\mathfrak{m}$. Wird $\mathfrak{m}^{2^i}$ durch $\sum\mathfrak{r}^{e_{\beta-\alpha}}E_{\alpha\beta}$ dargestellt, so wird $\mathfrak{k}_i$ durch $\sum\limits_{\alpha\neq\beta}\mathfrak{r}^{e_{\beta-\alpha}}E_{\alpha\beta}+\sum\limits_{\alpha<\beta}\mathfrak{r}^{e_0}(E_{\alpha\alpha}+E_{\beta\beta})$ erzeugt.

Ist $\mathfrak{p}$ ein im allgemeinen nichtkommutativer Körper, d.h. ist $\mathfrak{o}$ zweiseitig einfach, so bildet $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^2, \ldots\ldots, \mathfrak{m}^{2^{\sigma-1}}, \mathfrak{m}^{2^\sigma}=0$ die Reihe von Kommutatoridealen von $\mathfrak{m}$.[1]

---

1) Vgl. K. Shoda, Über das Holomorphie einer endlichen Abelschen Gruppe, diese Proc. **5** (1929), **8** die Schlussbemerkung.