67. *Zur Algebra der Logik.*

By Sigekatu KURODA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Rec. and Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1930.)

Wir betrachten ein System von Elementen, welches die zwei Kompositionsgesetze, Addition und Multiplikation, gestattet und welches die folgenden vier Postulate erfüllt:

I. Summe und Produkt zweier Elemente sind eindeutig bestimmt in diesem Systeme.

II. Für beliebige Elemente gilt:

$$A+B=B+A, \qquad AB=BA,$$
$$A+(B+C)=(A+B)+C, \qquad A(BC)=(AB)C,$$
$$A(B+C)=AB+AC, \qquad A+BC=(A+B)(A+C).$$

III. Es gibt die Elemente E_0 und E_1, die Additions- und die Multiplikationseinheit, von der Art, dass für beliebiges A gilt:

$$E_0+A=A, \qquad E_1A=A.$$

IV. Zu jedem Elemente A gibt es ein inverses Element A^{-1}, derart, dass

$$A+A^{-1}=E_1 \qquad \text{und} \qquad AA^{-1}=E_0.$$

Aus diesen Postulaten folgt das Dualitätsprinzip:

Ein richtiger Satz bleibt richtig, wenn Addition und Multiplikation miteinander vertauscht werden.

Satz 1: Die Einheiten sind eindeutig.

Beweis: Ist $E_0+A=A$ und $E_0'+A=A$, so folgt $E_0+E_0'=E_0=E_0'$.

Satz 2: Das inverse Element ist eindeutig.

Beweis: Ist $A+A'=E_1$, $AA'=E_0$ und auch $A+A''=E_1$, $AA''=E_0$, so ist $A'=(A+A'')A'=AA'+A''A'=A''A'$ und ähnlicherweise $A''=A''A'$, woraus folgt $A'=A''$.

Satz 3: $(A^{-1})^{-1}=A$.

Beweis: Wegen Kommutativität folgt unmittelbar aus IV.

Satz 4: $E_1+A=E_1$, $E_0A=E_0$.

Beweis: $E_1+A=(E_1+A)(A+A^{-1})=A+E_1A^{-1}=A+A^{-1}=E_1$.

Satz 5: $A+A=A$, $AA=A$.

Beweis: Aus Satz 4 folgt $E_1=E_1+E_1$, also $AE_1+AE_1=A(E_1+E_1)=AE_1$, d.h. $A+A=A$.

Satz 6: $(A+B)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$, $(AB)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.

Beweis: $(A+B)(A^{-1}B^{-1})=A(A^{-1}B^{-1})+B(A^{-1}B^{-1})=E_0B^{-1}+E_0A^{-1}$
$=E_0+E_0=E_0$,
$(A+B)+A^{-1}B^{-1}=(A+B+A^{-1})(A+B+B^{-1})$
$=(B+E_1)(A+E_1)=E_1$.

Satz 7: Aus $A+X_1=A+X_2$ und $AX_1=AX_2$ folgt $X_1=X_2$.

Beweis: Aus $AX_1=AX_2$ folgt $(AX_1)^{-1}=(AX_2)^{-1}=A^{-1}+X_2^{-1}$, was äquivalent ist mit $AX_1+(A^{-1}+X_2^{-1})=E_1$ und $AX_1(A^{-1}+X_2^{-1})=E_0$ oder mit

$$A^{-1}+X_1+X_2^{-1}=E_1\ldots\ldots(1) \quad \text{und} \quad AX_1X_2^{-1}=E_0\ldots\ldots(2).$$

Aus $A+X_1=A+X_2$ folgt wegen des Dualitätsprinzips

$$A+X_1+X_2^{-1}=E_1\ldots\ldots(3) \quad \text{und} \quad A^{-1}X_1X_2^{-1}=E_0\ldots\ldots(4).$$

Man multipliziere (1) und (3), addiere (2) und (4), und erhält

$$X_1+X_2^{-1}=E_1 \qquad \text{und} \qquad X_1X_2^{-1}=E_0,$$

woraus nach IV $X_1^{-1}=X_2^{-1}$, also nach Satz 2 $X_1=X_2$.

Satz 8: Die Gesamtheit der durch Addition bzw. Multiplikation von A sich ergebende Elemente bilden auch das System von derselben Art, welches der zu A gehörige Additionsteiler $\mathfrak{G}_{s(A)}$ bzw. Multiplikationsteiler $\mathfrak{G}_{p(A)}$ heisse.

Beweis: Das Zutreffen des Postulates I und II ist klar. Die Additionseinheiten von $\mathfrak{G}_{s(A)}$ bzw. $\mathfrak{G}_{p(A)}$ sind E_0+A bzw. E_0A und die Multiplikationseinheiten von $\mathfrak{G}_{s(A)}$ bzw. $\mathfrak{G}_{p(A)}$ sind E_1+A bzw. E_1A. $(A+X)^{-1}$ ist $A+X^{-1}$ in $\mathfrak{G}_{s(A)}$ und $(AX)^{-1}$ ist AX^{-1} in $\mathfrak{G}_{p(A)}$.

Definition: Die Gesamtheit der durch Addition bzw. Multiplikation von A ein und dasselbe Element ergebende Elemente heisst die Klasse der konjugierten Summanden bzw. Faktoren in Bezug auf A.

Satz 9: Eine konjugierte Summanden- und eine Faktorenklasse von A haben stets ein und nur ein Element gemein.

Beweis: Es gibt mindestens ein Element X, für das

$$A+X=A+M, \qquad AX=AN.$$

Denn wenn man $X=(A^{-1}+AN)(A+A^{-1}M)$ setzt, so ist

$$A+(A^{-1}+AN)(A+A^{-1}M)=(A+A^{-1}+AN)(A+A+A^{-1}M)$$
$$=E_1(A+A^{-1}M)=(A+A^{-1})(A+M)=A+M,$$
$$A(A^{-1}+AN)(A+A^{-1}M)=(AA^{-1}+AAN)(AA+AA^{-1}M)$$
$$=(AN)A=AN.$$

Wegen des Satzes 7 gibt es kein anderes X.

Nun beschränken wir uns auf das System, dessen Ordnung endlich ist. g sei seine Ordnung, s_a die von $\mathfrak{G}_{s(A)}$, p_a die von $\mathfrak{G}_{p(A)}$. s_a und p_a heisst auch Additions- bzw. Multiplikationsgrad von A in Bezug auf $\mathfrak{G}$.

Aus dem Satz 9 bekommt man die zu A gehörige Matrix

$$\left\| \begin{matrix} A_{11}\, A_{12}\, A_{13} \cdots\cdots\cdots A_{1p_a} \\ A_{21}\, A_{22}\, A_{23} \cdots\cdots\cdots A_{2p_a} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{s_a1} A_{s_a2} A_{s_a3} \cdots\cdots\cdots A_{s_ap_a} \end{matrix} \right\|,$$

wobei jede Zeile aus einer Summandenklasse $\mathfrak{H}_i$ ($i=1, 2, \ldots\ldots, s_a$) und jede Spalte aus einer Faktorenklasse $\mathfrak{K}_j$ ($j=1, 2, \ldots\ldots, p_a$) besteht. Man hat offenbar

$$\mathfrak{G}_{s(A)} = \{A+\mathfrak{H}_1,\ A+\mathfrak{H}_2,\ \ldots\ldots,\ A+\mathfrak{H}_{s_a}\} = A+\mathfrak{K} \qquad (j=1, 2, \ldots\ldots, p_a)$$

$$\mathfrak{G}_{p(A)} = \{A\mathfrak{K}_1,\ A\mathfrak{K}_2,\ \ldots\ldots,\ A\mathfrak{K}_{p_a}\} = A\mathfrak{H}_i \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, s_a).$$

Hieraus:

Satz 10: $g = s_a p_a$.

Satz 11: Unter den Elementen von dem (nicht aus lauter Einheiten bestehenden) System $\mathfrak{G}$ gibt es wenigstens ein Element, dessen Additionsgrad 2 ist.

Beweis: A sei das von Einheiten verschiedene Element von $\mathfrak{G}$, dessen Additionsgrad s_a der kleinste ist. Wäre nun $s_a > 2$, so gäbe es wenigstens ein von Einheiten verschiedenes Element B von $\mathfrak{G}_{s(A)}$. Die Ordnung s_{a+b} von $\{\mathfrak{G}_{s(A)}\}_{s(B)} = \mathfrak{G}_{s(A+B)}$, für die $s_{a+b} \leqq s_a$ wäre, müsste zu s_a gleich sein, was der Annahme über B widerspricht.

Satz 12: Die Ordnung des endlichen Systems ist stets die (nullte oder positive ganze) Potenz von 2.

Beweis: Falls $\mathfrak{G}$ nur aus ein oder zwei Einheiten besteht, so ist die Behauptung klar. Enthält $\mathfrak{G}$ ein anderes Element, so sei A das Element, dessen Additionsgrad 2 ist (Satz 11). Dann ist die Ordnung von $\mathfrak{G}_{p(A)}$ $g/2$ (Satz 10). Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens kommt man zum Abschluss und also hat man $g = 2^n$.

Satz 13: Alle Systeme von derselben Ordnung sind (holoedrisch) isomorph.

Beweis: Ist die Ordnung 1 oder 2, so ist der Satz klar. Gilt der Satz für $g = 2^n$, und sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ zwei Systeme von der Ordnung 2^{n+1}, so gibt es nach Satz 11 das Element A von $\mathfrak{G}$ und A′ von $\mathfrak{G}'$, deren Additionsgrad 2 ist. Da der Annahme wegen $\mathfrak{G}_{p(A)}$ mit $\mathfrak{G}'_{p(A')}$ und $\mathfrak{G}_{s(A)}$ mit $\mathfrak{G}'_{s(A')}$ isomorph sind, so denken wir uns die Klasse der

Summanden bzw. der Faktoren so numeriert, dass $A\mathfrak{K}_j \sim A'\mathfrak{K}'_j$ ($j=1, 2, \ldots\ldots, 2^n$) und $A+\mathfrak{H}_i \sim A'+\mathfrak{H}'_i$ ($i=1, 2$) sind. Wenn jedem Elemente von $\mathfrak{G}$, welches zu $\mathfrak{K}_j$ und $\mathfrak{H}_i$ gehört, dasjenige von $\mathfrak{G}'$, welches zu $\mathfrak{K}'_j$ und $\mathfrak{H}'_i$ gehört, zugeordnet wird, so hat man den Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$. Ist nämlich $P \sim P'$ und $Q \sim Q'$, so ist

$$(A+P)+(A+Q) \sim (A'+P')+(A'+Q') \quad \text{und} \quad AP+AQ \sim A'P'+A'Q',$$

d.h. $A+(P+Q) \sim A'+(P'+Q')$ und $A(P+Q) \sim A'(P'+Q')$.

Es folgt daher $P+Q \sim P'+Q'$, denn wenn $P+Q \sim R'$ ist, so ist

$$A'R' = A'(P'+Q') \quad \text{und} \quad A'+R' = A'+(P'+Q'),$$

und also $R'=P'+Q'$ nach Satz 7. Wegen des Dualitätsprinzips hat man $PQ \sim P'Q'$ und der Satz ist vollständig bewiesen.