91. *Zur Algebra der Logik, II.*[1]

By Sigekatu KURODA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Rec. and Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 13, 1930.)

Nachdem gezeigt ist, dass alle Systeme von derselben endlichen Ordnung holoedrisch isomorph sind (I., 13), wollen wir uns nun mit dem näheren Bau des endlichen Systems beschäftigen.

Satz 1: $s_a \cdot s_{a^{-1}} = 2^n$, wo s_a den Additionsgrad von A, $s_{a^{-1}}$ den von A^{-1} und 2^n die Ordnung des Systems bezeichnet.

Beweis: Aus $A\mathfrak{K}=B$, wo $\mathfrak{K}$ eine Klasse von konjugierten Faktoren (I., S. 221) in bezug auf A bezeichnet, folgt $A^{-1}+\mathfrak{K}^{-1}=B^{-1}$ und umgekehrt; was besagt, dass die konjugierte Faktorenklasse in bezug auf A die konjugierte Summandenklasse in bezug auf A^{-1} ist. Also wegen I., 10 folgt der Satz unmittelbar.

Satz 2: Aus zwei beliebigen von den drei folgenden Behauptungen folgt die dritte:

i) Der Additionsgrad von A in bezug auf $\mathfrak{S}$ ist 2^r.

ii) Der Additionsgrad von einem in $\mathfrak{S}_{p(A)}$ enthaltenen Elemente B in bezug auf $\mathfrak{S}_{p(A)}$ ist 2^s.

iii) Der Additionsgrad von B in bezug auf $\mathfrak{S}$ ist 2^{r+s}.

Beweis: Zunächst wird die letzte Behauptung aus den beiden ersten abgeleitet. Sei nämlich 2^n die Ordnung von $\mathfrak{S}$, so ist nach I., 10 2^{n-r} die von $\mathfrak{S}_{p(A)}$, und also 2^{n-r-s} die von $\{\mathfrak{S}_{p(A)}\}_{p(B)}=\mathfrak{S}_{p(AB)}$. Da andererseits AE_1 die Multiplikationseinheit von $\mathfrak{S}_{p(A)}$ und B in $\mathfrak{S}_{p(A)}$ enthalten, so ist $AB=(AE_1)B=B$. Daher ist $\mathfrak{S}_{p(AB)}=\mathfrak{S}_{p(B)}$ und iii) bewiesen. Dann umgekehrt folgt i) aus ii) und iii); denn sonst wäre $2^{r+s'}$ der Additiongrad von B in bezug auf $\mathfrak{S}$, wo $s \neq s'$ sein würde, gegen die Annahme. Ebenso folgt ii) aus i) und iii).

Satz 3: $A+AX=A$, $A(A+X)=A$.

Beweis: AX ist ein Element, A die Additionseinheit, von $\mathfrak{S}_{p(A)}$. Daher gilt: $A+AX=A$.

Bezeichnung: Die durch $\begin{Bmatrix}\text{Addition}\\ \text{Multiplikation}\end{Bmatrix}$ von einem Elemente A einunddasselbe Element B ergebende konjugierte $\begin{Bmatrix}\text{Summanden-}\\ \text{Faktoren-}\end{Bmatrix}$ klasse

---

1) Fortsetzung der Note unter demselben Titel (Art. 67, S. 220), im folgenden mit I. zitiert.

soll mit $\begin{Bmatrix}(A)_b\\ [A]_b\end{Bmatrix}$ bezeichnet werden.

Satz 4: $(A)_b=[A^{-1}]_{a-1b}$, $[A]_b=(A^{-1})_{a-1+b}$.

Beweis: Aus $A+X=B$ folgt $A^{-1}(A+X)=A^{-1}B$, d.h. $A^{-1}X=A^{-1}B$ und umgekehrt aus $A^{-1}X=A^{-1}B$ folgt $A+A^{-1}X=A+A^{-1}B$, d.h. $A+X=A+B=B$, weil B ein Element von $\mathfrak{G}_{s(A)}$ ist.

Satz 5: $\mathfrak{G}_{p(A)}=(A)_a=[A^{-1}]_{e_0}$, $\mathfrak{G}_{s(A)}=[A]_a=(A^{-1})_{e_1}$.

Beweis: Nach Satz 3 folgt $\mathfrak{G}_{p(A)}<(A)_a$, aber die Anzahlen der Elemente von $\mathfrak{G}_{p(A)}$ und $(A)_a$ sind einander gleich. Daher $\mathfrak{G}_{p(A)}=(A)_a$. Setzt man im Satze 4 $B=A$, so erhält man $(A)_a=[A^{-1}]_{a-1a}=[A^{-1}]_{e_0}$.

Bezeichnung: $\mathfrak{H}\dot{+}\mathfrak{K}$ bezeichnet die Vereinigung und $\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{K}$ den Durchschnitt von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$.

Satz 6: $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_{p(B)}\dot{+}\mathfrak{G}_{s(B-1)}$, falls $s_b=2$ ist.

Beweis: $\mathfrak{G}_{p(B)}\dot{+}\mathfrak{G}_{s(B-1)}=(B)_b\dot{+}(B)_{e_1}$ nach Satz 5. Mithin folgt der Satz aus $s_b=2$.

Satz 7: Es gibt in $\mathfrak{G}$ von der Ordnung 2^n genau $\binom{n}{r}$ Elemente, deren Additionsgrad 2^r ist.

Beweis: Der Satz ist klar, falls $n=0$ oder 1. Gilt der Satz für $n-1$ und ist B ein Element von $\mathfrak{G}$ mit dem Additionsgrad 2, so gilt nach Satz 6 $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_{p(B)}\dot{+}\mathfrak{G}_{s(B-1)}$. Nun ist die Anzahl der Elemente in $\mathfrak{G}_{p(B)}$, deren Additionsgrad in bezug auf $\mathfrak{G}_{p(B)}$ 2^{r-1} ist, der Annahme wegen $\binom{n-1}{r-1}$, und die in $\mathfrak{G}_{s(B-1)}$, deren Multiplikationsgrad in bezug auf $\mathfrak{G}_{s(B-1)}$ 2^{n-r-1}, $\binom{n-1}{n-r-1}$. Unter Berücksichtigung der Sätze 1, 2 und I., 10 beträgt die gesuchte Zahl

$$\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{n-r-1}=\binom{n}{r}, \quad \text{w.z.b.w.}$$

Satz 8: $\mathfrak{G}_{s(A)}\cdot\mathfrak{G}_{s(B)}=\mathfrak{G}_{s(A+B)}$. $\mathfrak{G}_{p(A)}\cdot\mathfrak{G}_{p(B)}=\mathfrak{G}_{p(AB)}$.

Beweis: Aus $A+X=H$ und $B+Y=H$ folgt $A+B+(X+Y)=H$, und umgekehrt aus $A+B+Z=H$ folgt $A+(B+Z)=H$ und $B+(A+Z)=H$.

Definition: Aus den im folgenden Satze 9 angeführten Gründen heissen die Elemente von $\mathfrak{G}$, deren Additionsgrad 2 ist, die multiplikative Basiselemente, oder Basiselemente schlechthin, von $\mathfrak{G}$, sie seien mit $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ bezeichnet. Dann heissen $B_1^{-1}, B_2^{-1}, \ldots\ldots, B_n^{-1}$ die additive Basiselemente von $\mathfrak{G}$.

Hilfssatz: Ist $A=B_1B_2\ldots\ldots B_r$, so ist $s_a=2^r$.

Beweis: Da $X+A=X+B_1B_2\ldots\ldots B_r=(X+B_1)(X+B_2)\ldots\ldots(X+B_r)$

und $s_{b_i}=2$, so ist $s_a \leqq 2^r$. Ferner gilt nach Satz 6:

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_{p(B_i)} \dotplus \mathfrak{G}_{s(B_i^{-1})}, \qquad i=1, 2, \ldots\ldots, r.$$

Nach 1, 2 und 7 gibt es in $\mathfrak{G}_{s(B_m^{-1})}$ kein B_i^{-1} ausser B_m^{-1}, also sind alle B_i^{-1} bis auf B_m^{-1} in $\mathfrak{G}_{p(B_m)}$ enthalten. Mithin ist das Element B_m^{-1} nie in $\mathfrak{G}_{p(B_m)}$ aber in allen andern $\mathfrak{G}_{p(B_i)}$ enthalten. Daher ist die Ordnung von $\mathfrak{G}_{p(B_1)} \cdot \mathfrak{G}_{p(B_2)}=\mathfrak{G}_{p(B_1B_2)}$ höchstens 2^{n-2}, da sie eine Potenz von 2 sein muss und da $\mathfrak{G}_{p(B_1)}$ und $\mathfrak{G}_{p(B_2)}$ nicht zusammenfallen können. Ebenso ist die Ordnung von $\mathfrak{G}_{p(B_1B_2)} \cdot \mathfrak{G}_{p(B_3)}=\mathfrak{G}_{p(B_1B_2B_3)}$ höchstens 2^{n-3}, da sie eine Potenz von 2 sein muss und B_3^{-1} nur in $\mathfrak{G}_{p(B_1B_2)}$ aber nicht in $\mathfrak{G}_{p(B_3)}$ enthalten ist. Indem man dies Verfahren fortsetzt, so gelangt man zuletzt zu dem Schlusse, dass die Ordnung von

$$\mathfrak{G}_{p(B_1)} \cdot \mathfrak{G}_{p(B_2)} \cdots\cdots \mathfrak{G}_{p(B_r)}=\mathfrak{G}_{p(B_1B_2\cdots\cdots B_r)}=\mathfrak{G}_{p(A)}$$

höchstens 2^{n-r}, d.h. $p_a \leqq 2^{n-r}$. Weil aber $s_a p_a=2^n$ (I., 10), so muss $s_a=2^r$ sein.

Satz 9[1]*:* Ein Element A vom Additionsgrad 2^r lässt sich eindeutig darstellen in der Form

$$A=B_1^{i_1}B_2^{i_2}\cdots\cdots B_n^{i_n}, \qquad i=0 \text{ oder } 1;$$

hierbei ist $B^0=E_1$ gesetzt und genau r Exponenten gleich 1.

Beweis: Der extreme, triviale Fall, wo $A=E_1$, lässt sich von vornherein ausschliessen. In $\mathfrak{G}_{s(A)}$ gibt es der Sätze 1, 2 und 7 wegen $\binom{r}{r-1}=r$ Basiselemente von $\mathfrak{G}$; sie seien $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_r$. Das Produkt $B_1B_2\cdots\cdots B_r$ ist offenbar ein Element von $\mathfrak{G}_{s(A)}$ und sein Additionsgrad in bezug auf $\mathfrak{G}$ ist 2^r (Hilfssatz). Da es nun in $\mathfrak{G}_{s(A)}$ nur ein einziges Element $AE_1=A$ gibt, dessen Additionsgrad in bezug auf $\mathfrak{G}$ 2^r ist, so gilt $A=B_1B_2\cdots\cdots B_r$. Die Anzahl der verschiedenen, als Produkt von r Basiselementen darstellbaren Elementen sind höchstens $\binom{n}{r}$. Aber in $\mathfrak{G}$ gibt es genau $\binom{n}{r}$ Elemente vom Additionsgrad 2^r (Satz 7). Mathin sind $\binom{n}{r}$ Produkte alle voneinander verschieden und die Darstellung muss sogar eindeutig sein.

Zusatz 1: Das System der multiplikativen (bzw. additiven) Basiselemente von $\mathfrak{G}$ ist eindeutig.

Zusatz 2: $B_1B_2\cdots\cdots B_n=E_0$, $B_1^{-1}+B_2^{-1}+\cdots\cdots+B_n^{-1}=E_1$,

---

1) Ein anderer Bweis dieses Satzes wird nächstens mitgeteilt werden.

Zusatz 3: Ist $A=B_1B_2\cdots\cdots B_r$, so ist $A^{-1}=B_{r+1}B_{r+2}\cdots\cdots B_n$.

Beweis: A^{-1} muss als Produkt von $n-r$ Basiselementen dargestellt werden. Wenn unter diesen Faktoren einer von $B_1, B_2, \cdots\cdots B_r$, etwa B_1, gäbe, so würde $A+A^{-1}=B_1X\neq E_1$. Daher ist die Annahme falsch und $A^{-1}=B_{r+1}B_{r+2}\cdots\cdots B_n$.

Zusatz 4: Die Gruppe der sämtlichen Automorphismen des endlichen Systems ist die symmetrische Permutationsgruppe vom Grade n, wobei in jedem Automorphismus die Elemente von $\mathfrak{G}$ mit demselben Additionsgrad einander entsprechen.

Beweis: Wenn sich die multiplikative Basiselemente einmal und zwar auf beliebige Weise zuordnen lassen, so wird nach Satz 9 die Zuordnung aller Elemente mitbestimmt.

Bemerkung: Ein Beispiel unseres Systems $\mathfrak{G}$ wird durch das System der $2^{(2^n)}$ Aussagenverbindungen[1] gegeben, welche durch Kombination von n Grundaussagen $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ gebildet werden können, indem logisch äquivalente Aussagen für gleiche Elemente angesehen werden. Dabei lassen sich die 2^n multiplikative Basiselemente in der Form

$$X_1^{i_1}+X_2^{i_2}+\cdots\cdots+X_n^{i_n} \qquad (i=\pm 1)$$

darstellen; die Normalform im Satze 9 deckt sich dann mit der sogenannten ausgezeichneten konjunktiven Normalform.[1] Ein anderes Beispiel ist dasjenige Mengensystem,[2] welchem mit zwei Mengen des Systems auch deren Vereinigung, Durchschnitt und Differenz (wenn möglich) angehören.

---

1) Vgl. Hilbert-Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik, S. 15 u.f.

2) Vgl. Hausdorff: Mengenlehre, 2te Aufl. S. 78.