18. Über die Fermatsche Vermutung, VII.

Von Taro MORISHIMA.
Furitsu Kotogakko, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1932.)

Vandiver[1] hat den folgenden Satz bewiesen:

Zur Lösbarkeit der Fermatschen Gleichung

$$x^l+y^l+z^l=0 \tag{1}$$

im Falle I[2] ist notwendig, dass der erste Faktor h der Klassenzahl des Kreiskörpers $P(\zeta)$ durch l^3 teilbar ist, wo $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{l}}$.

Ich will diese Ergebnisse erweitern und den Satz beweisen:

Hat die Gleichung (1) *eine Auflösung im Falle I und ist*

$$20579903\cdot 75571 \not\equiv 0 \pmod{l},$$

so muss der erste Faktor h der Klassenzahl die Bedingung erfüllen:

$$h\equiv 0 \pmod{l^{12}}.$$

Aus (1) folgt

$$(x+\zeta y)=\mathfrak{a}^l, \qquad \left(\frac{\zeta}{\mathfrak{a}}\right)=\zeta^{\frac{N\mathfrak{a}-1}{l}}=\zeta^{\frac{(x^l+y^l/x+y)-1}{l}}=1, \tag{2}$$

wo $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $P(\zeta)$ ist. Setzt man[3]

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{1-\zeta^r}{1-\zeta}\cdot\frac{1-\zeta^{-r}}{1-\zeta^{-1}}}, \quad E_m(\zeta)=\prod_{i=0}^{\mu-1}\varepsilon(\zeta^{r^i})^{r^{-2im}}, \quad \left(\frac{E_m(\zeta)}{\mathfrak{a}}\right)=\zeta^{\operatorname{ind} E_m(\zeta)},$$

$$b_1=-\frac{1}{2}, \quad b_{2i}=(-1)^{i+1}B_i \text{ (Bernoullische Zahl)}, \quad b_{2i+1}=0,$$

$$D_i=\left[\frac{d^i \log(x+e^\nu y)}{d\nu^i}\right]_{\nu=0},$$

so ist nach Vandiver[4]

$$b_{(2m-1)l+1}\cdot D_{l(l-2m)}\equiv\frac{2l \operatorname{ind} E_m(\zeta)}{r^{2m}-1} \pmod{l^2} \tag{3}$$

und nach Kummer[5]

$$\operatorname{ind}\left(\frac{1-\zeta^s}{1-\zeta}\right)\equiv\frac{s-1}{2}\operatorname{ind}\zeta-2\sum_{m=1}^{\mu-1}\frac{\operatorname{ind} E_m(\zeta^s)-\operatorname{ind} E_m(\zeta)}{r^{2m}-1} \pmod{l}. \tag{4}$$

---

1) Vgl. Annals of Math., (2), **26** (1925).
2) $(x, y, z, l)=1$.
3) r ist primitive Wurzel modulo l und $\mu=\frac{l-1}{2}$.
4) Vgl. Annals of Math., (2), **26** (1925), S. 226.
5) Vgl. Crelles Journ., **56**, S. 277.

Also ist nach (2), (3) und (4)

$$l\cdot \operatorname{ind}\left(\frac{1-\zeta^s}{1-\zeta}\right)\equiv -\sum_{m=1}^{\mu-1} b_{(2m-1)l+1}\cdot D_{l(l-2m)}\cdot (s^{2m}-1) \qquad (\operatorname{mod} l^2). \quad (5)$$

Ferner ist nach Vandiver[1)]

$$\sum_{k=1}^{\mu} \operatorname{ind}\left(\frac{1-\zeta^{-\frac{i}{k}-1}}{1-\zeta}\right)\equiv 0 \qquad (i=1, \ldots\ldots, \mu) \qquad (\operatorname{mod} l). \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt für $i=1, 2, \ldots\ldots, \mu$

$$\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{m=1}^{\mu-1}\left[\left(\frac{i}{k}+1\right)^{2m}-1\right] b_{(2m-1)l+1}\cdot D_{l(l-2m)}\equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} l^2),$$

also wegen $\sum_{k=1}^{\mu} k^{i-1}\equiv \frac{(1-2^i)b_i}{2^{i-1}i}$ (mod l)[2)]

$$\sum_{n=2}^{\mu}\frac{(1-2^{2n})b_{2n}}{2^{2n}n}\left[\sum_{m=2}^{n}\binom{l-2m+1}{l-2n} b_{(l-2m)l+1}\cdot D_{l(2m-1)}\right] i^{l-2n}\equiv 0 \quad (\operatorname{mod} l^2).$$

Daher ist für $n=2, 3, \ldots\ldots, \mu$

$$(2^{2n}-1)b_{2n}\left[\sum_{m=2}^{n}\binom{l-2m+1}{l-2n} b_{(l-2m)l+1}\cdot D_{l(2m-1)}\right]\equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} l^2). \quad (7)$$

Nun ist für $n=2, 3, \ldots\ldots, 7$ und $l>691$

$$(2^{2n}-1)b_{2n}\not\equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} l),$$

also nach (7)

$$b_{(l-2m)l+1}\cdot D_{l(2m-1)}\equiv 0 \qquad (m=2, 3, \ldots\ldots, 7) \qquad (\operatorname{mod} l^2),$$

folglich

$$b_{(l-2m)l+1}\left[\frac{d^{(2m-1)l}\log(1-e^{v}t)}{dv^{(2m-1)l}}\right]_{v=0}\equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} l^2), \quad (8)$$

$$(m=2, 3, \ldots\ldots, 7)$$

wo

$$-t=\frac{y}{x}, \frac{x}{y}, \frac{z}{y}, \frac{y}{z}, \frac{x}{z}, \frac{z}{x}. \qquad (9)$$

Nun ist für $m=2, 3, 4, 5$ (nach Mirimanoff)[3)]

$$\left[\frac{d^{(2m-1)l}\log(1-e^{v}t)}{dv^{(2m-1)l}}\right]_{v=0}\equiv\left[\frac{d^{2m-1}\log(1-e^{v}t)}{dv^{2m-1}}\right]_{v=0}\not\equiv 0$$

$$(\operatorname{mod} l) \quad (10)$$

1) Vgl. Annals of Math., (2), **26**, S. 228.

2) Vgl. Vandiver, Ann. of Math., (2), **18**, S. 114.

3) Vgl. Bachmann, Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung (1919), S. 120-121.

und für $m=6, 7$

$$\left[\frac{d^{(2m-1)l}\log(1-e^{\nu}t)}{d\nu^{(2m-1)l}}\right]_{\nu=0}\equiv\left[\frac{d^{2m-1}\log(1-e^{\nu}t)}{d\nu^{2m-1}}\right]_{\nu=0}\equiv\frac{-F_{2m-1}(t)}{(1-t)^{2m-1}} \pmod{l}, \tag{11}$$

wo $F_{11}(t)=t+1013t^2+47840t^3+455192t^4+1310354t^5+1310354t^6$ $+455192t^7+47840t^8+1013t^9+t^{10}$,

$F_{13}(t)=t+4083t^2+478271t^3+10187685t^4+66318474t^5+162512286t^6$ $+162512286t^7+66318474t^8+10187685t^9+478271t^{10}+4083t^{11}$ $+t^{12}$.

Aber $F_{11}(t)$ und $F_{13}(t)$ sind nicht durch[1)]

$$t-3t^2+bt^3-(2b-5)t^4+bt^5-3t^6+t^7$$

teilbar, wenn $l>13$. Also ist

$$F_{11}(t)\,,\quad F_{13}(t)\not\equiv 0 \pmod{l}, \tag{12}$$

wenn die sechs Verhältnisse (9) inkongruent sind. Auch

$$F_{11}(2)\,,\quad F_{13}(2)\not\equiv 0 \pmod{l}, \tag{12}$$

wenn $20579903\cdot 75571\not\equiv 0 \pmod{l}$ und $l>41$ ist.[2)] Aus (8) folgt also nach (10), (11) und (12)

$$b_{(l-2m)l+1}\equiv 0 \qquad (m=2, 3, \ldots\ldots, 7) \pmod{l^2}. \tag{13}$$

Nun ist nach Vandiver[3)]

$$\frac{n^i-1}{l}\sum_{a=1}^{l-1}a^i=\sum_{a=1}^{l-1}\sum_{s=1}^{i}a^i\binom{i}{s}\left(\frac{d_a}{a}\right)^s l^{s-1},$$

wo $d_a\equiv-\frac{a}{l} \pmod{n}$, $0\leqq d_a<n$, $(n, l)=1$, also für $i=(l-2m)l^c+1$

$$\frac{n^i-1}{l}\sum_{a=1}^{l-1}a^i\equiv i\sum_{a=1}^{l-1}d_a a^{i-1} \pmod{l^2}$$

und anderseits

$$\frac{1}{l}\sum_{a=1}^{l-1}a^i\equiv b_i \pmod{l^2} \qquad (l>3)\,,$$

also

$$\frac{n^i-1}{i}b_i\equiv\sum_{a=1}^{l-1}d_a a^{i-1} \pmod{l^2}.$$

---

1) Vgl. ditto, S. 71.

2) $t^3\not\equiv-1$:—Vgl. Pollaczek, Sitzungsber. Akad. Wiss., Wien, **126,** II a (1917), S. 45.

3) Vgl. Ann. of Math., (2), **18,** S. 112, (7 a).

Daher ist für $c=1, 12$

$$\frac{n^{(l-2m)l+1}-1}{(l-2m)l+1}b_{(l-2m)l+1}\equiv\sum_{a=1}^{l-1}d_a a^{(l-2m)l},$$

$$\frac{n^{(l-2m)l^{12}+1}-1}{(l-2m)l^{12}+1}b_{(l-2m)l^{12}+1}\equiv\sum_{a=1}^{l-1}d_a a^{(l-2m)l^{12}} \pmod{l^2},$$

also

$$\frac{n^{(l-2m)l+1}-1}{(l-2m)l+1}b_{(l-2m)l+1}\equiv\frac{n^{(l-2m)l^{12}+1}-1}{(l-2m)l^{12}+1}b_{(l-2m)l^{12}+1} \pmod{l^2},$$

da $a^{(l-2m)l}\equiv a^{(l-2m)l^{12}} \pmod{l^2}$ ist. Folglich nach (13)

$$b_{(l-2m)l^{12}+1}\equiv 0 \qquad (m=2, 3, \ldots\ldots, 7) \qquad \pmod{l^2}, \tag{14}$$

da $n^{(l-2m)l^{12}+1}\not\equiv 1 \pmod{l}$ ist.

Nach Vandiver ist auch[1)]

$$h\equiv\frac{l\prod_s b_{sl^{12}+1}}{2^{\mu-1}} \pmod{l^{12}}, \tag{15}$$

wo $s=1, 3, \ldots\ldots, l-2$. Aus (14) und (15) folgt

$$h\equiv 0 \pmod{l^{12}}.$$

1) Vgl. Bull. Am. Math. Soc., Vol. **25**, S. 460, (8).