PAPERS COMMUNICATED

60. Über eine stetige Matrixfunktion.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 13, 1932.)

Mit den grossen lateinischen Buchstaben A, B, C, u.s.w. bezeichnen wir die Matrizen n-tes Grades, deren Elemente a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, u.s.w. sind, und ihre Determinanten bezeichnen wir mit $|A|$, $|B|$, $|C|$, u.s.w.

Satz 1. Wenn eine stetige Matrixfunktion $\varphi(A)$ für je drei Matrizen, A, B und C die Relation

$$\varphi(ABC)=\varphi(ACB) \tag{1}$$

erfüllt, so hängt $\varphi(A)$ nur von der Determinante $|A|$ ab.

Beweis. Ersetzt man in (1) B durch $C^{-1}B$, so erhält man

$$\varphi(AC^{-1}BC)=\varphi(AB),$$

oder allgemeiner

$$\varphi(AR_1^{-1}BR_1R_2^{-1}CR_2\ldots\ldots)=\varphi(ABC\ldots\ldots). \tag{2}$$

Wir nehmen zuerst an, dass die ersten n Hauptdeterminanten von A

$$\alpha_i=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots a_{1i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}\cdots\cdots\cdots a_{ii} \end{vmatrix} \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, n)$$

alle von Null verschieden sind, wobei $\alpha_n=|A|$ und $\alpha_0=1$ sind. Man kann eine Matrix $B=(b_{ij})$ derart bestimmen, dass $b_{ij}=0$ für $i>j$, $=1$ für $i=j$ und für $i<j$ (wegen $\alpha_i\neq 0$)

$$\begin{aligned} &a_{11}b_{1i}+\cdots\cdots+a_{1,i-1}b_{i-1,i}+a_{1i}=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{i-1,1}b_{1i}+\cdots\cdots+a_{i-1,i-1}b_{i-1,i}+a_{i-1,i}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, n) \end{aligned}$$

Es ist dann AB gleich einer Matrix $C=(c_{ij})$, wobei $c_{ij}=0$ für $i<j$ und $=\dfrac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}$ für $i=j$. Wenn man mit $T=(t_{ij})$ eine Matrix bezeichnet, dass $t_{ij}=0$ für $i\neq j$ und $=t_i\neq 0$ für $i=j$ ist, so gilt nach (2)

$$\varphi(AT^{-1}BT)=\varphi(AB)=\varphi(C)=\varphi(TCT^{-1})$$

Wenn man nun $\dfrac{t_{i+1}}{t_i}$ $(i=1, 2, \ldots\ldots, n-1)$ gleichzeitig nach Null streben lässt, so konvergiert $T^{-1}BT$ nach der Einheitsmatrix und TCT^{-1} nach solcher Matrix $C'=(c_{ij}')$, dass $c_{ij}'=0$ für $i\neq j$ und $=\frac{a_i}{a_{i-1}}$ für $i=j$ sind. Daher folgt aus der Stetigkeit von $\varphi(A)$

$$\varphi(A)=\varphi(C')\,.$$

Bildet man die Matrix $E_m(a)$ $(m=1, 2, \ldots\ldots, n)$ derart dass, $e_{ij}=0$ für $i\neq j$, $=1$ für $i=j\neq m$, und $=a$ für $i=j=m$ ist, so gilt

$$C'=E_1(a_1)E_2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\ldots\ldots E_n\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right).$$

Es gibt stets eine Matrix D_m, welche $E_m(a)$ in $E_1(a)$ transformiert, z.B.

$$D_m=\begin{pmatrix} 0 & & 1\ldots\ldots 0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 1\ldots\ldots & 0 & \ldots\ldots 0 \\ & & 1 \\ & & \ddots \\ 0\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots 1 \end{pmatrix}$$

die durch Vertauschung der 1-ten und der m-ten Zeile aus der Einheitsmatrix hervorgeht. Daher haben wir nach (2)

$$\begin{aligned}\varphi(C')&=\varphi\left(E_1(a_1)E_2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\ldots\ldots E_n\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\right)\\ &=\varphi\left(E_1(a_1)E_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\ldots\ldots E_1\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\right)\\ &=\varphi(E_1(a_n))\,,\end{aligned}$$

d.h.

$$\varphi(A)=\varphi(E_1(|A|))\,. \tag{3}$$

Da $\varphi(A)$ nach a_{ij} stetig ist, so gilt die Relation (3) für jede Matrix A, d.h. es hängt $\varphi(A)$ nur von $|A|$ ab.

Bemerkung. Durch eine leichte Modifikation des vorhergehenden Beweises kann man einsehen, dass der Satz auch für die unimodularen Matrizen gilt, und daraus folgt der

Satz 2. Die unimodulare Gruppe besitzt keine stetige abelsche Darstellung ausser der identischen.

Im folgenden bezeichnen wir mit R und θ den absoluten Betrag und das Argment der Determinate $|A|$.

Satz 3. Wenn eine stetige Matrixfunktion $\varphi(A)$ für je zwei Matrizen A und B stets die Relation

$$\varphi(AB)=\varphi(A)\cdot\varphi(B) \tag{4}$$

erfüllt, so ist

$$\varphi(A)=R^a e^{im\Theta},$$

wobei m eine ganze Zahl, und a eine nicht negative reelle Zahl, wenn A und $\varphi(A)$ reell, eine komplexe Zahl mit nicht negativem reellen Teil, wenn A und $\varphi(A)$ komplex sind.[1]

Beweis. Da nach Satz 1. $\varphi(A)$ nur von der Determinante $|A|=x$ abhängt, so setzen wir

$$\varphi(A)=f(x),$$

sodass nach (4)

$$f(xy)=f(x)f(y),$$

wo $f(x)$ stetig in x ist. Insbesondere

$$f(x)=f(R)f(e^{i\Theta}), \qquad (x=Re^{i\Theta})$$

woraus für jede rationale Zahl t stets

$$\begin{aligned} f(R_0^t)&=f(R_0)^t, \\ f(e^{it\Theta_0})&=f(e^{i\Theta_0})^t, \end{aligned} \tag{5}$$

wenn R_0 und θ_0 positive Zahlen sind. Da $f(x)$ stetig ist, so gelten die Relationen (5) für jede reelle Zahl t.

Setzt man daher $R=R_0^t$, $\theta=t\theta_0$, so ist

$$f(R)=R^{\frac{\log f(R)}{\log R_0}}, \qquad f(e^{i\Theta})=e^{\frac{\log f(e^{i\Theta_0})}{\Theta_0}}.$$

Daher muss

$$f(x)=R^a e^{im\Theta}$$

sein. Im reellen Falle muss a eine nicht negative Zahl und m eine ganze Zahl sein, denn $f(x)$ soll reell und stetig sein ($\theta=k\pi$), und im komplexen Falle muss $\Re(a)$ nicht negativ und m eine ganze Zahl sein, weil $f(x)$ stetig und eindeutig ist, w.z.b.w.

---

1) Herr C. Stéphanos hat dieses Problem behandelt, unter der Annahme, dass $\varphi(A)$ nach a_{ij} partiell differentierbar ist, Annali di math., III, **21** (1913). Sein Ergebnis: $\varphi(A)$ sei gleich einer Potenz der Determinante von A ist nicht bindend, wie mich Herr Takagi darauf aufmerksam machte mit dem Beispiel: $\varphi(x)=x^3$ aber auch $=|x|^3$.