95. Über die Verteilung der Nullstellen von den Lösungen der Differentialgleichung $\frac{d^2w}{dz^2}+G(z)w=0$ einer komplexen Veränderlichen.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.
(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Oct. 12, 1932.)

Wir setzen $z=x+iy$, und beschränken uns auf der reellen Axe der Gaussschen Ebene.

Satz 1. $G(z)$ sei auf der reellen Axe ($0\leqq x\leqq a$, $y=0$) eine stetige Funktion, und ihr reeller Teil $\Re G(z)$ sei daselbst nicht grösser als eine positive Konstante R. Eine den Anfangspunkt $z=0$ durchgehende und nicht identish verschwindende Lösung $w(z)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{dz^2}+G(z)w=0\,, \tag{1}$$

besitzt keine Nullstelle zwischen $0<x<\mathrm{Min}\left(a,\ \frac{\pi}{\sqrt{R}}\right)$ auf der reellen Axe $y=0$.

Beweis. Wir bezeichnen mit $x_0(>0)$ die auf der reellen Axe nächst dem Anfangspunkt $z=0$ liegende Nullstelle von $w(z)$. Die Differentialgleichung

$$w''(x)+G(x)w(x)=0$$

lässt sich in der Form

$$\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)'+\left(\frac{w'(x)}{w(x)}\right)^2+G(x)=0$$

schreiben. Wenn man nur den reellen Teil in Betracht zieht, so ist

$$\left(\Re\frac{w'}{w}\right)'+\left(\Re\frac{w'}{w}\right)^2-\left(\Im\frac{w'}{w}\right)^2+\Re G(x)=0\,,$$

darum besteht die Ungleichung

$$\left(\Re\frac{w'}{w}\right)'+\left(\Re\frac{w'}{w}\right)^2+\Re G(x)\geqq 0\,.$$

Da für $0<x<x_0$ die Relation

$$\Re\frac{w'}{w}=\Re\frac{d}{dx}\log w=\frac{d}{dx}\log|w|=\frac{|w|'}{|w|}$$

besteht, so gilt

$$\left(\frac{|w|'}{|w|}\right)' + \left(\frac{|w|'}{|w|}\right)^2 + R \geqq 0 . \tag{2}$$

Aus $w(0)=0$ und $w'(0)\neq 0$ folgt $[|w(x)|']_{x=0}=|w'(0)|\neq 0$, demnach $\left[\frac{|w|'}{|w|}\right]_{x=\infty}=+\infty$, so erhält man durch Integration,

$$\int_{+\infty}^{\frac{|w|'}{|w|}} \frac{d\lambda}{\lambda^2+R} + x \geqq 0 , \tag{3}$$

nämlich

$$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{|w|'}{|w|} \geqq \frac{\pi}{2} - \sqrt{R}\,x .$$

Daher besteht die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{|w|'}{|w|} \geqq \tan\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{R}\,x\right),$$

nämlich

$$\frac{|w|'}{|w|} \geqq \sqrt{R}\cot\sqrt{R}\,x$$

für $0 < x < \mathrm{Min}\left(a, x_0, \frac{\pi}{\sqrt{R}}\right)$.

Durch Integration von x_1 bis x $(x > x_1 > 0)$ bekommt man

$$\log\frac{|w(x)|}{|w(x_1)|} \geqq \log\frac{\sin\sqrt{R}\,x}{\sin\sqrt{R}\,x_1},$$

nämlich

$$|w(x)| \geqq \frac{|w(x_1)|}{\sin\sqrt{R}\,x_1}\sin\sqrt{R}\,x .$$

Daher folgt aus $\lim_{x_1\to 0}\frac{w(x_1)}{\sin\sqrt{R}\,x_1} = \frac{w'(0)}{\sqrt{R}}$ die Ungleichung

$$|w(x)| \geqq \frac{|w'(0)|}{\sqrt{R}}\sin\sqrt{R}\,x$$

für $0 < x < \mathrm{Min}\left(a, x_0, \frac{\pi}{\sqrt{R}}\right)$. Da die rechte Seite für $0 < x < \frac{\pi}{\sqrt{R}}$ stets positiv bleibt, so muss $x_0 \geqq \mathrm{Min}\left(a, \frac{\pi}{\sqrt{R}}\right)$ sein, was zu beweisen war.

Ähnlicherweise kann man auch die folgenden zwei Sätze beweisen.

Satz 2. $w(z)$ sei eine Lösung von (1). Wir bezeichnen mit α den absoluten Betrag von $w(0)$ und mit β deren rechte Derivierte nach x. Dann gilt

$$|w(x)| \geqq \frac{1}{\sqrt{R}} \beta \sin \sqrt{R}\, x + \alpha \cos \sqrt{R}\, x \text{ [1]}$$

für $$0 < x < \mathrm{Min}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R}} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{\beta}{\alpha},\ a\right).$$

Satz 3. $R(x)$ sei eine reelle stetige Funktion für $0 \leqq x \leqq a$, und daselbst gelte $\Re G(x) \leqq R(x)$. Dann ist die auf der reellen Axe nächst dem Anfangspunkt $z=0$ liegende Nullstelle jeder dem Anfangspunkt durchgehenden und nicht identisch verschwindenden Lösung von (1), nicht kleiner als dieselbe einer den Anfangspunkt durchgehenden und nicht identisch verschwindenden Lösung von

$$\frac{d^2y}{dx^2} + R(x)y = 0 \text{ . [2]}$$

---

1) Indem man die untere Grenze $+\infty$ des in (3) bezeichneten Integrals durch $\frac{\beta}{\alpha}$ ersetzt, kann man leicht, gerade wie oben, diese Abschätzung ableiten.

2) Diesen Satz kann man leicht durch die (2) entsprechende Ungleichung uumittelbar geometrisch beweisen, während es sich aber auch auf das Sturmsche Komparationstheorem reduzieren lässt, indem man jene Ungleichung in der Form

$$|w(z)|'' + R(x)\,|w(x)| \geqq 0$$

schreibt.