PAPERS COMMUNICATED

10. *Über die Teilbarkeit der Dedekindschen Zetafunktionen.*

Von Hideo ARAMATA.
Daiichi Kôtôgakko, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 13, 1933.)

Mein Zweck ist, den folgenden Satz zu beweisen:

Ist ein algebraischer Zahlkörper K in bezug auf den Grundkörper k galoissch, dann ist $\zeta_K(s)$ durch $\zeta_k(s)$ teilbar, d.h. der Quotient

$$Z(s)=\frac{\zeta_K(s)}{\zeta_k(s)}$$

ist dann eine ganze Funktion von s.[1]

Hierzu stützen wir uns auf folgende Sätze:

Satz 1. Es sei q eine ganze positive Zahl. Ist dann $\varphi(k)$ bzw. $\mu(k)$ die Eulersche bzw. Möbiussche Funktion, so ist

$$\sum_{k\mid q}(\varphi(k)-\mu(k))\sum_{(a,q)=1}e^{2\pi i\frac{a}{k}}=-\sum_{k\mid q}(\varphi(k)-\mu(k)).$$

Beweis. Wegen

$$\sum_{(a,q)=1}e^{2\pi i\frac{ad}{k}}=\frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{k}{(k,d)}\right)}\mu\left(\frac{k}{(k,d)}\right),\quad k\mid q \tag{1}$$

kommt es nur darauf an, die Relation

$$\sum_{k\mid q}\frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)}=\frac{q}{\varphi(q)}$$

zu beweisen, was leicht einzusehen ist.

Satz 2. Es sei $d\mid q$, $1<d<q$. Alsdann gilt

$$\sum_{k\mid q}\varphi(k)\sum_{(a,q)=1}e^{2\pi i\frac{ad}{k}}=0,\quad \sum_{k\mid q}\mu(k)\sum_{(a,q)=1}e^{2\pi i\frac{ad}{k}}=0.$$

Beweis. Aus (1) lassen sich beide elementar herleiten.

Setz 3. Für $d\mid q$, $1<d<q$ ist

---

1) Vgl. E. Artin, „Über die Zetafunktionen gewisser algebraischer Zahlkörper," Math. Annalen **89** (1923), 147–156; und auch

H. Aramata, „Über die Teilbarkeit der Zetafunktionen gewisser algebraischer Zahlkörper," Proc. **7** (1931), 334–336.

$$\sum_{k\mid q}(\varphi(k)-\mu(k)) \sum_{(a,q)=d} e^{2\pi i\frac{a}{k}}=0\,.$$

Bewis. Wegen

$$\sum_{(a,q)=d} e^{2\pi i\frac{a}{k}}=\frac{\varphi\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi(q)} \sum_{(a,q)=1} e^{2\pi i\frac{ad}{k}}$$

ergibt sich dieser Satz sofort aus Satz 2.

Satz 4. Die Ordnung q eines Elementes τ aus einer (endlichen) Gruppe $\mathfrak{G}$ sei >1, d.h. $\tau\neq 1$.

$$\chi_{\psi_k}(\rho) \qquad (\rho<\mathfrak{G})$$

bezeichne den durch den einfachen Charakter ψ_k der zyklischen Untergruppe $\{\tau\}$ induzierten Charakter von $\mathfrak{G}$. Die Abteilung, welche τ enthält, sei zur Abkürzung τ-Abteilung genannt. Unter den $\varphi(q)$ Potenzen von τ, die in der τ-Abteilung liegen, seien

$$\tau^{a_1},\ \tau^{a_2},\ \ldots\ldots,\ \tau^{a_r},\ (a_1=1)$$

und nur diese mit τ konjugiert. Alsdann lassen sich $\lambda=\frac{\varphi(q)}{r}$ ganze positive Zahlen

$$b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots,\ b_\lambda,\ (b_1=1)$$

so auswählen, dass immer die r Potenzen von τ (und nur diese)

$$\tau^{a_1b_i},\ \tau^{a_2b_i},\ \ldots\ldots,\ \tau^{a_rb_i},\ (1\leqq i\leqq\lambda)$$

in ein und derselben Klasse auftreten. Nun schreibe ich

$$X_k^\tau(\rho)=\sum_{i=1}^{\lambda}\chi_{\psi_k^{b_i}}(\rho)\,.$$

Dann gilt

$$\text{(2)}\qquad X_k^\tau(\rho)=\begin{cases}\dfrac{g}{q}\,\dfrac{\varphi(q)}{r} & \text{für } \rho=1\,,\\[2mm] \dfrac{g}{qn_\tau}\sum\limits_{(a,q)=1}\psi_k(\tau^a) & \text{für ein } \rho \text{ aus der } \tau\text{-Abteilung},\\[2mm] \dfrac{g}{qn_\rho}\nu_d\sum\limits_{(a,q)=d}\psi_k(\tau^a) & \text{für ein } \rho \text{ aus der } \tau^d\text{-Abteilung } (d\mid q,\ d<q),\\[2mm] 0 & \text{sonst},\end{cases}$$

wobei g die Ordnung von $\mathfrak{G}$, n_ρ die Anzahl der mit ρ konjugierten Elemente aus $\mathfrak{G}$, ν_d eine von k unabhängige ganze positive Zahl bedeutet.

Beweis. Bekanntlich ist nach Frobenius

$$\chi_{\psi_k}(\rho)=\frac{g}{qn_\rho}\sum_a{}'\psi_k(\tau^a)\,,$$

die Summe erstreckt über alle a, derart, dass τ^a in der ρ enthaltenen Klasse auftreten. Es ist also

$$X_k^{\tau}(\rho)=\frac{g}{qn_\rho}\sum_{i=1}^{\lambda}\sum_a{}'\psi_k^{b_i}(\tau^a),$$

woraus sich unsere Formel (2) herleiten lässt. Nur ist der dritte Fall, dass ρ in der τ^d-Abteilung $(d\,|\,q,\ d<q)$ liegt, etwas kompliziert. Wir denken uns dann etwa $\rho=\tau^d$. Unter den $\varphi(q)$ Potenzen von τ

$$\tau^{b_i a_j d} \qquad (1\leqq i\leqq\lambda,\ 1\leqq j\leqq r) \tag{3}$$

tritt jede Potenz von τ aus unserer τ^d-Abteilung genau $\dfrac{\varphi(q)}{\varphi\left(\dfrac{q}{d}\right)}$ mal auf. Die Potenzen auf einer Zeile

$$\tau^{b_i a_1 d},\ \tau^{b_i a_2 d},\ \ldots\ldots,\ \tau^{b_i a_r d}$$

sind natürlich miteinander konjugiert. Wenn also die Potenzen aus den ν Zeilen (und nur diese)

$$\tau^{b_i a_j d} \qquad (1\leqq i\leqq\nu,\ 1\leqq j\leqq r)$$

mit τ^d konjugiert sind, so gibt es unter den $\varphi(q)$ Potenzen (3) genau νr, die in einer bestimmten Klasse auftreten. Daraus ergibt sich

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\dfrac{q}{d}\right)}\sum_a{}'\psi_k(\tau^a)=\sum_{\substack{1\leqq i\leqq\nu\\1\leqq j\leqq r}}\psi_k(\tau^{b_i a_j d}),$$

$$\sum_{i=1}^{\lambda}\sum_a{}'\psi_k^{b_i}(\tau^a)=\nu\frac{\varphi\left(\dfrac{q}{d}\right)}{\varphi(q)}\sum_{\substack{1\leqq i\leqq\lambda\\1\leqq j\leqq r}}\psi_k(\tau^{b_i a_j d})=\nu\sum_{\substack{(a,q)=d\\1\leqq a\leqq q}}\psi_k(\tau^a);$$

also ist $\nu_d=\nu$, was sicherlich von k unabhängig ist.

Satz 5. Es sei

$$k\,|\,q,\quad \psi_k(\tau)=e^{\frac{2\pi i}{k}}.$$

Dann ist

$$\Xi^{\tau}(\rho)=\frac{n_\tau}{g}\sum_{k\,|\,q}(\varphi(k)-\mu(k))X_k^{\tau}(\rho)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(q)}{r}n_\tau & \text{für } \rho=1,\\ -1 & \text{für ein } \rho \text{ aus der } \tau\text{-Abteilung},\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Beweis. Nach den Sätzen 1,3 und 4 haben wir

$$\sum_{k|q}(\varphi(k)-\mu(k))\mathrm{X}_k^\tau(\rho)=\begin{cases}\dfrac{g\varphi(q)}{qr}\sum\limits_{k|q}(\varphi(k)-\mu(k)) & \text{für } \rho=1\,,\\ -\dfrac{g}{qn_\tau}\sum\limits_{k|q}(\varphi(k)-\mu(k)) & \text{für ein } \rho \text{ aus der } \tau\text{-Abteilung,}\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

wobei

$$\sum_{k|q}(\varphi(k)-\mu(k))=q\,.$$

Hieraus ergibt sich unser Satz 5.

Satz 6. Wenn τ je ein Element aus jeder Abteilung von $\mathfrak{G}$ (abgesehen von der Abteilung 1) durchläuft, dann ist

$$\sum\Xi^\tau(\rho)=\begin{cases}q-1 & \text{für } \rho=1\,,\\ -1 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 5.

Beweis des Hauptsatzes. Weil sich der Quotient $Z(s)$ durch die Artinschen L-Funktionen für $K|k$ darstellen lässt, genügt es in der Tat zu zeigen, dass der zugehörige Charakter

$$\varPhi(\rho)=\sum_{i=2}^{h}f_i\chi_i(\rho)$$

als lineare Kombination der Charaktere

$$\chi_{\varphi_k}\qquad(k\neq1)$$

mit *positiven* Koeffizienten darstellbar ist. Hierbei bedeutet h die Anzahl der Klassen konjugierter Elemente aus der galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von $K|k$, χ_i einen einfachen Charakter von $\mathfrak{G}$, f_i den Grad von χ_i. Nach Satz 6 ist aber

$$\varPhi(\rho)=\sum\Xi^\tau(\rho)\,,$$

wenn τ je ein Element aus jeder Abteilung von $\mathfrak{G}$ (abgesehen von der Abteilung 1) durchläuft. Wegen

$$\varphi(k)-\mu(k)=\begin{cases}0 & \text{für } k=1\,,\\ >0 & \text{für } k>1\end{cases}$$

ist also unser Hauptsatz vollständig bewiesen.