PAPERS COMMUNICATED

58. *Über einen Satz von Herrn Artin.*

Von Tadao TANNAKA.
Mathematisches Institut der Tohoku Universität, Sendai.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., May 12, 1933.)

Die grundlegende Sätze in der Klassenkörpertheorie gelten auch bei den Henselschen transzendenten Erweiterungskörpern, wie wir in den Arbeiten von Hasse, F. K. Schmidt und Chevalley[1] u.s.w. ersehen können.

Ich will hier den Artinschen „allgemeinen Hauptidealsatz"[2] auf die p-adische Körper erweitern.

SATZ. Es sei $\bar{K}/\bar{k}$ metabelscher (genauer „zweistufig metabelscher") Körper über den Henselschen Körper $\bar{k}=k(\mathfrak{p})$, und $\bar{k}'$ der grösste Abelsche Teilkörper von $\bar{K}/\bar{k}$, so fallen in $\bar{k}'$ alle Zahlen aus $\bar{k}$ in die $\bar{K}$ zugeordnete Zahlgruppe in $\bar{k}'$.[3]

Dieser Satz ist leicht auf den ursprünglichen Artinschen Satz reduzierbar.

Herr Schmidt hat in seiner oben angegebenen Arbeit (S) folgenden Hilfssatz bewiesen:

Es sei $\bar{K}$ ein Abelscher Körper über dem Körper $\bar{k}$ (ein aus dem Zahlkörper k erweiterter Henselscher Körper), dann gibt es endliche Erweiterungen k_1/k und K_1/k_1 so dass $\bar{K}=\bar{k}K_1=\bar{k}_1K_1$ gilt.

Aus diesem Satz oder vielmehr direkt nach Muster seines Beweises zeigt man leicht, dass unserer metabelscher Körper $\bar{K}/\bar{k}$ durch den Zahlkörpern K, $k_1(\geqq k)$ erhalten wird, wobei die folgenden Relationen gelten:

A. Der Grenzkörper von k_1 ist $\bar{k}$.

---

1) H. Hasse: Die Normenresttheorie relativ Abelscher Körper als Klassenkörpertheorie im Kleinen. Journ. f. Math. 162 (1930). (zitiert mit (H).)

F. K. Schmidt: Zur Klassenkörpertheorie im Kleinen. Journ. f. Math. 162 (1930). (zitiert mit (S).)

C. Chevalley: Sur un théorème de M. Hasse. Comptes Rendus de l'Acad. Paris. (1930).

2) E. Artin: Idealklassen in Oberkörpern und allgemeines Reziprozitätzgesetz. Abh. Math. Sem. Hamburg 6, 1928; oder auch H. Hasse: Bericht über Reziprozitätzgesetz. Jahresber. d. D. M. V. 6, Ergänzungsband, 1930.

3) Betreffs der Definitionen vergleiche man (H).

B. Es ist $\bar{K}=K\cdot\bar{k}_1(=K\cdot\bar{k})$.

C. K/k_1 ist metabelsch und seine Galoissche Gruppe ist isomorph mit derselben von $\bar{K}/\bar{k}$ bei der geläufigen Zuordnung der Galois-Substitutionen.[1)]

Es sei nun k' der grösste über k_1 Abelsche Teilkörper von K, dann ist $\bar{k}'$ offenbar der Grenzkörper von k'. Ist dann $\bar{\beta}$ eine beliebige Zahl aus $\bar{k}$, so ist unsere Behauptung äquivalent mit

$$\left(\frac{\bar{\beta},\ K/k'}{\mathfrak{p}'}\right)=1\,,$$

wobei $\mathfrak{p}'$ ein (sogar der einzige, da der Grad $[K:k_1]$ gleich $[\bar{K}:\bar{k}]$ ist) Primidealfaktor des Primideals $\mathfrak{p}_1$ in k_1 mit $\mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}$ ist. Wir wählen nun als Hilfszahl für die Definition des Normenrestsymbols $\left(\frac{\bar{\beta},\ K/k'}{\mathfrak{p}'}\right)$ eine Zahl β aus k_1 mit

$$\beta_0\equiv\bar{\beta}\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k'))\,,$$

$$\beta_0\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{f}(K/k')\mathfrak{f}(k'/k_1)\div\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k')\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_1}(k'/k_1))\,,$$

$$\beta_0=\mathfrak{p}_1^{b}\mathfrak{b}\,,\quad \mathfrak{b}\ \text{prim zu}\ \mathfrak{p}_1\,.$$

Nach der Wahl der Zahl β_0 ist $\mathfrak{b}$ prim zu $\mathfrak{f}(k'/k)$ und $\mathfrak{f}(K/k')$; und betrachtet man, dass, wie schon erwähnt, $\mathfrak{p}_1$ eine Potenz von $\mathfrak{p}'$ ist, so folgt

$$\left(\frac{\bar{\beta},\ K/k'}{\mathfrak{p}'}\right)=\left(\frac{K/k'}{\mathfrak{b}}\right).$$

Das in der rechten Seite stehende Artin-Symbol $\left(\frac{K/k'}{\mathfrak{b}}\right)$ ist, da $\mathfrak{b}$ ein Ideal in k_1 ist, nach dem Artinschen allgemeinen Hauptidealsatz gleich 1, womit ist unsere Behauptung bestätigt.

---

1) Der Substitution $\bar{\sigma}$ von $\bar{K}/\bar{k}$ wird nämlich das aus $\bar{\sigma}$ bei Anwendung auf K erzeugte Automorphismus von K zugeordnet.