164. Über die Darstellungen einer endlichen Gruppe durch reelle Kollineationen.

Von Keizo ASANO.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 12, 1933.)

Es sei $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe mit den Elementen $H_1, H_2, \ldots\ldots, H_h$. Es sei $c_{P,Q} \neq 0$ ein Faktorensystem in einem reellabgeschlossenen Körper Ω, d.h. der h^2 Elemente aus Ω, welche den Gleichungen

$$c_{P,Q}c_{PQ,R} = c_{P,QR}c_{Q,R} \qquad (P, Q, R = H_1, H_2, \ldots\ldots, H_h) \tag{1}$$

genügen. Dann ist

$$c_{P,Q}^h = \frac{c_P c_Q}{c_{PQ}}, \qquad c_P = \prod_R c_{P,R}. \tag{2}$$

Ist h ungerade, so ist

$$c_{P,Q} = \frac{\delta_P \delta_Q}{\delta_{PQ}}. \qquad (\delta_P^h = c_P, \quad \delta_P \in \Omega)$$

Also läuft die Darstellung von $\mathfrak{H}$ durch Kollineationen auf die Darstellung von $\mathfrak{H}$ durch Matrizen hinaus.[1] Wir brauchen daher nur den Fall zu betrachten, wo h gerade ist.

Es sei nun h gerade. Zwei Faktorensysteme $c_{P,Q}$ und $c'_{P,Q}$ heissen einander assoziiert, wenn sich h Elemente k_P aus Ω so bestimmen lassen, dass die Gleichungen

$$c_{P,Q}^h = \frac{k_P k_Q}{k_{PQ}} c_{P,Q} \tag{3}$$

erfüllt sind. Die Klassen assoziierter Faktorensysteme bilden eine multiplikative abelsche Gruppe $\mathfrak{M}$. Da $c_{P,Q}^h > 0$ ist, folgt aus (2)

$$c_{P,Q}^h = \frac{|c_P|\,|c_Q|}{|c_{PQ}|}.$$

Es muss also

$$c_{P,Q} = \frac{\delta_P \delta_Q}{\delta_{PQ}}(-1)^{a_{P,Q}} \qquad (\delta_P^h = |c_P|, \quad \delta_P > 0)$$

sein. Jede Klasse enthält ein Faktorensystem von der Form $c_{P,Q} = (-1)^{a_{P,Q}}$. Daher ist $\mathfrak{M}$ eine endliche abelsche Gruppe vom

1) I. Schur: Über die Darstellungen der endlichen Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen. Journal für Math. **127**. (1904). §1.

Typus (2, 2, ……, 2). Die Ordnung m von $\mathfrak{M}$ lässt sich wie folgt bestimmen.

Ist $c_{P,Q}=(-1)^{a_{P,Q}}$ ein Faktorensystem, so bestehen nach (1) die h^3 Gleichungen

$$a_{P,Q}+a_{PQ,R}\equiv a_{P,QR}+a_{Q,R} \pmod 2, \tag{4}$$

oder

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots\cdots+a_{iq}x_q\equiv 0 \pmod 2, \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots\ldots, h^3, \\ q=h^2, \ a_{ij}=0, \ \pm 1 \end{pmatrix} \tag{4$'$}$$

wenn man $a_{P,Q}$ in geeigneter Reihenfolge mit x_j bezeichnet. Sind $c_{P,Q}=(-1)^{a'_{P,Q}}$ und $c'_{P,Q}=(-1)^{a'_{P,Q}}$ assoziiert, so bestehen die Relationen

$$a'_{P,Q}-a_{P,Q}\equiv a_P+a_Q-a_{PQ} \pmod 2,$$

und umgekehrt. Es sei l die Anzahl der verschiedenen Lösungen mod. 2 von (4)$'$ und l' die von der Gestalt

$$x_j=a_{P,Q}\equiv a_P+a_Q-a_{PQ} \pmod 2. \tag{5}$$

Die gesuchte Zahl m ist gleich $\dfrac{l}{l'}$.

Herr I. Schur hat in seiner Arbeit[2] gezeigt, dass der Rang der Matrix (a_{ij}) gleich h^2-h ist und ihre Elementarteiler $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_r$, welche grösser als 1 sind, das Invariantensystem des Multiplikators von $\mathfrak{H}$ (im absoluten Sinne) bilden. Weil wir jetzt mod. 2 betrachten, ist der Rang von (a_{ij}) gleich $h^2-h-\rho$, wo ρ die Anzahl der geraden Zahlen unter $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_r$ bedeutet. Das Gleichungssystem (4)$'$ besitzt ein Fundamentalsystem von $h^2-(h^2-h-\rho)=h+\rho$ Lösungen. Also ist $l=2^{h+\rho}$. Wie leicht einzusehen, ist $l'=\dfrac{2^h}{l''}$, wo l'' die Anzahl der Lösungen a_P mod. 2 von

$$a_P+a_Q-a_{PQ}\equiv 0 \pmod 2$$

bedeutet. l'' ist nichts anderes als die Anzahl der reellen linearen Charaktere von $\mathfrak{H}$. Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_A$ die Invarianten der abelschen Gruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{C}$, wo $\mathfrak{C}$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{H}$ bedeutet, und ist σ die Anzahl der geraden Zahlen unter ihnen, so ist ersichtlich $l''=2^\sigma$, also $l'=2^{h-\sigma}$. Die gesuchte Zahl ist

$$m=\frac{l}{l'}=2^{\rho+\sigma}.$$

---

2) I. Schur: a.a.O. §3.

Es seien $K_1, K_2, \ldots\ldots, K_\nu$ $(\nu=\rho+\sigma)$ die Basiselemente von $\mathfrak{M}$, und $c^{a^{(i)}_{P,Q}}=(-1)^{a^{(i)}_{P,Q}}$ sei ein Faktorensystem aus K_i. Es sei ferner $\mathfrak{A}$ eine zu $\mathfrak{M}$ isomorphe abelsche Gruppe und A_i das zu K_i entsprechende Element von $\mathfrak{A}$. Setzt man

$$A_{P,Q}=A_1^{a^{(1)}_{P,Q}}A_2^{a^{(2)}_{P,Q}}\ldots\ldots A_\nu^{a^{(\nu)}_{P,Q}} \qquad (P,Q=H_1, H_2, \ldots\ldots, H_h)$$

und bildet man eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Ordnung mh mit den Elementen AG_P durch die Festsetzung

$$AG_P=G_PA \ \ (A\in\mathfrak{G}), \qquad G_PG_Q=A_{P,Q}G_{PQ},$$

so ist $\mathfrak{G}$ eine Darstellungsgruppe in diesem Fall und die Darstellungen von $\mathfrak{H}$ durch reelle Kollineationen sind auf die Darstellungen von $\mathfrak{G}$ durch reelle Matrizen reduziert.[3]

---

3) Vgl. K. Asano und K. Shoda: Zur Theorie der Darstellungen einer endlichen Gruppe durch Kollineationen, erscheint demnächst in Japanese Journal of Mathematics.