84. *Die natürliche Gleichung der Minimalkurven im konformen Raume.*

Von Tsurusaburo TAKASU.

Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., June 12, 1934.)

Die natürliche Gleichung der Minimalkurven im euklidischen Raume hat E. Study aufgestellt.[1] Die im N. E. Raume habe ich behandelt.[2] Im folgenden möchte ich die natürliche Gleichuug der Minimalkurven im konformen Raume bestimmen.[3] Das Ergebnis befindet eine Anwendung in der „Kurventheorie" in der Ebene der Lieschen höheren Kreisgeometrie.[4]

Es seien

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}(p) \qquad \Big((\mathfrak{p}\mathfrak{p})_5=0,\quad (d\mathfrak{p}d\mathfrak{p})_5=0\Big) \tag{1}$$

die Gleichungen der Minimalkurven in pentasphärischen Punkt-koordinaten. Bei der Umnormierung $\check{\mathfrak{p}}=\rho\mathfrak{p}$ gilt die folgende Beziehung:

$$\left(\frac{d^2\check{\mathfrak{p}}}{dp^2}\,\frac{d^2\check{\mathfrak{p}}}{dp^2}\right)_5=\rho^2\left(\frac{d^2\mathfrak{p}}{dp^2}\,\frac{d^2\mathfrak{p}}{dp^2}\right)_5. \tag{2}$$

Wenn man daher $\check{\mathfrak{p}}$ so normieren will, dass

$$\boxed{\left(\frac{d^2\check{\mathfrak{p}}}{dp^2}\,\frac{d^2\check{\mathfrak{p}}}{dp^2}\right)_5=1} \tag{3}$$

wird, so muss man den Proportionalitätsfaktor ρ so wählen, dass

$$\rho=\left(\frac{d^2\mathfrak{p}}{dp^2}\,\frac{d^2\mathfrak{p}}{dp^2}\right)_5^{-\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

---

1) E. Study: Die natürliche Gleichung der analytischen Kurven im euklidischen Raume. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 11 (1910), S. 259.

2) T. Takasu: Natural Equation of Curves under Circular Point-Transformation Groups and their Duals. Tôhoku Math. Journ., vol. 25 (1925), S. 135.

3) Vgl. T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, I. Tôhoku Sci. Rep., vol. 17 (1928), S. 315. Hier ist es bezweckt die Anzahl der natürlichen Gleichungen bis zu eins zu vermindern.

4) T. Takasu: Differentialkugelgeometrie im Lieschen Raume, I. Tôhoku Sci. Rep., (1934), unter der Presse. Ist also $\check{\mathfrak{p}}(t)$ der gewöhnliche orientierte Schmiegungskreis, so ist $(33)=\phi(t)$ die natürliche Gleichung der „Kurven" in der Lieschen Ebene. Diese Untersuchung ist durch das Stipendium der Stiftung „Saitô-Hoönkwai" durchgeführt.

(5) $$\boxed{\check{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}:\left(\frac{d^2\mathfrak{p}}{dp^2}\,\frac{d^2\mathfrak{p}}{dp^2}\right)_5^{\frac{1}{2}}}$$

wird. Setzt man

(6) $$\frac{d\mathfrak{p}}{dp}\equiv\mathfrak{x}^*, \qquad \frac{d\check{\mathfrak{p}}}{dp}\equiv\check{\mathfrak{x}}^*,$$

so wird (3) zu:

(7) $$\left(\frac{d\check{\mathfrak{x}}^*}{dp}\,\frac{d\check{\mathfrak{x}}^*}{dp}\right)_5=1.$$

Bei der Parametertransformation

(8) $$p=p(t)$$

erfahren $\mathfrak{x}^*$ und $\check{\mathfrak{x}}^*$ die folgenden Umnormierungen:

(9) $$\mathfrak{x}\equiv\frac{d\mathfrak{p}}{dt}=\mathfrak{x}^*\frac{dp}{dt}, \qquad \check{\mathfrak{x}}\equiv\frac{d\check{\mathfrak{p}}}{dt}=\check{\mathfrak{x}}^*\frac{dp}{dt}.$$

Führen wir nun einen neuen Parameter t durch die Forderung

(10) $$dt^4=\|\check{\mathfrak{x}}^*\,d\check{\mathfrak{x}}^*\,d^2\check{\mathfrak{x}}^*\,d^3\check{\mathfrak{x}}^*\|^2:(d\check{\mathfrak{x}}^*d\check{\mathfrak{x}}^*)_5^4$$

ein, so ist gewiss auch

(11) $$dt^4=\|\check{\mathfrak{x}}\,d\check{\mathfrak{x}}\,d^2\check{\mathfrak{x}}\,d^3\check{\mathfrak{x}}\|^2:(d\check{\mathfrak{x}}d\check{\mathfrak{x}})_5^4.$$

Im Falle $p=t$ lassen sich (7) und (11) bzw. wie folgt umschreiben:

(12) $$\boxed{\left(\frac{d^2\check{\mathfrak{p}}}{dt^2}\,\frac{d^2\check{\mathfrak{p}}}{dt^2}\right)_5\equiv\left(\frac{d\check{\mathfrak{x}}}{dt}\,\frac{d\check{\mathfrak{x}}}{dt}\right)_5=1,}$$

(13) $$\boxed{\left\|\frac{d\check{\mathfrak{p}}}{dt}\,\frac{d^2\check{\mathfrak{p}}}{dt^2}\,\frac{d^3\check{\mathfrak{p}}}{dt^3}\,\frac{d^4\check{\mathfrak{p}}}{dt^4}\right\|^2=1.}$$

Da $\check{\mathfrak{x}}$ nach (5) und (12) gegenüber den Umnormierungen von $\mathfrak{p}$ Invarianten sind, so ist dt auch gegenüber denselben Umnormierungen invariant.

Setzt man $\left(\frac{d^r\check{\mathfrak{p}}}{dt^r}\,\frac{d^s\check{\mathfrak{p}}}{dt^s}\right)_5=(rs)$, so erhält man die folgende Tabelle:

(14)
$$\begin{array}{llllll}
(00)=0, & (01)=0, & (02)=0, & (03)=0, & (04)=1, & (05)=0, \\
 & (11)=0, & (12)=0, & (12)=-1, & (14)=0, & (15)=\phi, \\
 & & (22)=1, & (23)=0, & (24)=-\phi, & (25)=-\frac{3}{2}\phi', \\
 & & & (33)\equiv\phi, & (34)=\frac{1}{2}\phi', & (35)=\frac{1}{2}\phi''-\psi, \\
 & & & & (44)\equiv\psi, & (45)=\frac{1}{2}\psi'.
\end{array}$$

Wegen (14) wird (13) zu:

$$(15) \qquad \boxed{(33)^2-(44)=1\,.}$$

Weiter gilt die folgende Beziehung[1]:

$$(16) \qquad \boxed{\left|\check{\mathfrak{p}}\;\frac{d\check{\mathfrak{p}}}{dt}\;\frac{d^2\check{\mathfrak{p}}}{dt^2}\;\frac{d^3\check{\mathfrak{p}}}{dt^3}\;\frac{d^4\check{\mathfrak{p}}}{dt^4}\right|=1\,.}$$

Setzt man von (14) in

$$\begin{vmatrix} y^{(V)} & y^{(IV)} & y''' & y'' & y' & y \\ \check{\mathfrak{p}}_1^{(V)} & \check{\mathfrak{p}}_1^{(IV)} & \check{\mathfrak{p}}_1''' & \check{\mathfrak{p}}_1'' & \check{\mathfrak{p}}_1' & \check{\mathfrak{p}}_1 \\ \check{\mathfrak{p}}_2^{(V)} & \check{\mathfrak{p}}_2^{(IV)} & \check{\mathfrak{p}}_2''' & \check{\mathfrak{p}}_2'' & \check{\mathfrak{p}}_2' & \check{\mathfrak{p}}_2 \\ \check{\mathfrak{p}}_3^{(V)} & \check{\mathfrak{p}}_3^{(IV)} & \check{\mathfrak{p}}_3''' & \check{\mathfrak{p}}_3'' & \check{\mathfrak{p}}_3' & \check{\mathfrak{p}}_3 \\ \check{\mathfrak{p}}_4^{(V)} & \check{\mathfrak{p}}_4^{(IV)} & \check{\mathfrak{p}}_4''' & \check{\mathfrak{p}}_4'' & \check{\mathfrak{p}}_4' & \check{\mathfrak{p}}_4 \\ \check{\mathfrak{p}}_5^{(V)} & \check{\mathfrak{p}}_5^{(IV)} & \check{\mathfrak{p}}_5''' & \check{\mathfrak{p}}_5'' & \check{\mathfrak{p}}_5' & \check{\mathfrak{p}}_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \check{\mathfrak{p}}_1 & \check{\mathfrak{p}}_1' & \check{\mathfrak{p}}_1'' & \check{\mathfrak{p}}_1''' & \check{\mathfrak{p}}_1^{(IV)} \\ 0 & \check{\mathfrak{p}}_2 & \check{\mathfrak{p}}_2' & \check{\mathfrak{p}}_2'' & \check{\mathfrak{p}}_2''' & \check{\mathfrak{p}}_2^{(IV)} \\ 0 & \check{\mathfrak{p}}_3 & \check{\mathfrak{p}}_3' & \check{\mathfrak{p}}_3'' & \check{\mathfrak{p}}_3''' & \check{\mathfrak{p}}_3^{(IV)} \\ 0 & \check{\mathfrak{p}}_4 & \check{\mathfrak{p}}_4' & \check{\mathfrak{p}}_4'' & \check{\mathfrak{p}}_4''' & \check{\mathfrak{p}}_4^{(IV)} \\ 0 & \check{\mathfrak{p}}_5 & \check{\mathfrak{p}}_5' & \check{\mathfrak{p}}_5'' & \check{\mathfrak{p}}_5''' & \check{\mathfrak{p}}_5^{(IV)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y^{(V)} & y^{(IV)} & y''' & y'' & y' & y \\ (05) & (04) & (03) & (02) & (01) & (00) \\ (15) & (14) & (13) & (12) & (11) & (10) \\ (25) & (24) & (23) & (22) & (21) & (20) \\ (35) & (34) & (33) & (32) & (31) & (30) \\ (45) & (44) & (43) & (42) & (41) & (40) \end{vmatrix} = 0$$

ein, so ergibt sich die folgende Differentialgleichung:

$$(17) \qquad y^{(V)}+\phi y'''+\tfrac{3}{2}\phi' y''+(\phi^2-\psi+\tfrac{1}{2}\phi'')y'+(\phi\phi'-\tfrac{1}{2}\psi')y=0\,,$$

welcher $y=\check{\mathfrak{p}}(t)$ für die Minimalkurven genügen muss. Nun sind ϕ und ψ nach (15) durch

$$(18) \qquad \boxed{\psi\equiv\phi^2-1\,, \qquad \psi'=2\phi\phi'}$$

verbunden, so dass (17) in die folgende übergeht[2]:

$$(19) \qquad \boxed{y^{(V)}+\phi y'''+\tfrac{3}{2}\phi' y''+(1+\tfrac{1}{2}\phi'')y'=0\,.}$$

---

1) Hierbei könnte die rechte Seite auch -1 sein. Aber wir haben das Koordinatensystem so angenommen, dass sie 1 wird. Nach (16) ersieht man, dass dt^2 bei den uneigentlichen konformen Transformationen den Faktor -1 erhält.

2) Vgl. T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, I. Tôhoku Sci. Rep., vol. 17 (1928), S. 242, Formel (147).

Also erhalten wir wie üblich den

Fundamentalsatz. *Durch Angabe der zweimal stetig differenzierbaren Funktion* $\phi(t)$ *ist eine Minimalkurve* $y=\check{\mathfrak{p}}(t)$ *durch Auflösung von* (17) *bis auf konforme Transformationen eindeutig so bestimmt, dass die Minimalkurve die Funktion* $\phi(t)$ *und den Parameter t bzw. für* $\left(\frac{d^3\check{\mathfrak{p}}}{dt^3}\frac{d^3\check{\mathfrak{p}}}{dt^3}\right)_5$ *und* (11) *hat.*