# 154. *Sur la théorie des ensembles analytiques dans les espaces abstraits.*

Par Kinjiro KUNUGUI.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Nov. 12, 1934.)

Plusieurs théorèmes sur la théorie des ensembles analytiques[1] ont été établis dans les espaces métriques complets et séparables. Dans cette note, nous allons montrer comment nous pouvons débarrasser ces deux conditions. Rappelons que la fermeture $\bar{E}$ de l'ensemble $E$ est $E+E'$. Un espace $(v)$, où toute fermeture est fermée sera dit un espace quasi-accessible. Nous allons donner d'abord deux théorèmes de projection.

Théorème I (Steinbach[2]) Soient $R$ un espace quasi-accessible et $S$ un espace métrique complet séparable. La projection $P$ d'un ensemble analytique $M$ dans l'espace $R\times S$[3] projeté sur $R$ est un ensemble analytique dans $R$.

Démonstration :—Soit $M$ un ensemble analytique donné dans l'espace $R\times S$:

$$M=\sum \prod_k F_{n_1n_2\dots n_k} \tag{1}$$

où $F_{n_1n_2\dots n_k}$ sont des ensembles fermés. On peut supposer que $F_{n_1n_2\dots n_k}\supseteq F_{n_1n_2\dots n_k\,n_{k+1}}$ et que la projection de $F_{n_1n_2\dots n_k}$ sur l'espace $S$ a un diamètre $<\frac{1}{k}$. Soit $Q_{n_1n_2\dots n_k}$ la projection de $F_{n_1n_2\dots n_k}$ sur l'espace $R$, et posons $P_{n_1n_2\dots n_k}=\bar{Q}_{n_1n_2\dots n_k}$. Nous allons prouver que $P=\sum \prod_k P_{n_1n_2\dots n_k}$.

Il est clair que $P\subset \sum \prod_k P_{n_1n_2\dots n_k}$. Inversement soit $p$ un point de $\sum \prod_k P_{n_1n_2\dots n_k}$; supposons par exemple, $p\in \prod_k P_{n_1n_2\dots n_k}$ et considérons l'ensemble $p\times S$. Cet ensemble est un espace métrique complet séparable. Si $F_{n_1n_2\dots n_k}(p\times S)\neq 0$ pour tout $k=1, 2, 3, \dots$ le point

1) M. Hausdorff les appelle ensembles de Souslin; voir son "Mengenlehre" 1927 p. 177.

2) G. Steinbach: Beiträge zur Mengenlehre. Diss. Bonn. 1930. M. Steinbach a démontré ce théorème pour les espaces métriques arbitraires. Ici nous avons donné une démonstration basée sur une idée différente.

3) Soit $(a, b)$ un point de l'espace $R\times S$. Nous considérons l'ensemble $V(a)\times V(b)$ comme voisinage du point $(a, b)$ dans l'espace $R\times S$, où $V(a)$ et $V(b)$ sont des voisinages quelconques de $a$ et de $b$ dans les espaces $R$ et $S$ respectivement.

$\prod_{k=1}^{\infty} F_{n_1 n_2 \dots n_k}(p \times S)$ est un point de $M \cdot (p \times S)$ par suite $p \in P$.

Sinon il existe un $k_0$ tel que

$$(2) \qquad F_{n_1 n_2 \dots n_k}(p \times S) = 0 \qquad k \geq k_0$$

$Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$ et par suite $F_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ne sont pas vides, et la projection de $F_{n_1 n_2 \dots n_k}$ sur $S$ tend vers un point $q$. Soient $V(p)$ et $V(q)$ des voisinages quelconques de $p$ et $q$ respectivement.

Comme $p \in P_{n_1 n_2 \dots n_k} = \bar{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k}$, il existe un point $p_k$ de $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$ contenu dans $V(p)$. Donc il existe un point $(p_k, q_k)$ de $F_{n_1 n_2 \dots n_k}$; celui-ci étant monotone, $(p_{n+k}, q_{n+k}) \in F_{n_1 k_2 \dots n_k}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ D'autre part, comme $\lim_{k \to \infty} q_k = q$, il existe un indice $k_1$ tel que $(p_k, q_k) \in V(p) \times V(q)$, $k \geq k_1$. Donc $(p, q)$ est un point de $F_{n_1 n_2 \dots n_k} + F'_{n_1 k_2 \dots n_k}$. Par suite $F_{n_1 n_2 \dots n_k}$ contient le point $(p, q)$ contrairement à (2). C. Q. F. D[4]

On dit que $M$ est un *ensemble d'unicité*, si $M$ est un ensemble analytique représentable par un schème de Souslin $\{F_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ satisfaisant à la condition suivante: $n_1, n_2, n_3, \dots$ et $m_1, m_2, m_3, \dots$ étant deux suites infinies distinctes de nombres naturels on a toujours

$$\prod_{k=1}^{\infty} F_{n_1 n_2 \dots n_k} \cdot F_{m_1 m_2 \dots m_k} = 0$$

Le schème $\{F_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ se dit un système d'unicité.

Théorème II. Soient $R$ un espace quasi-accessible et $S$ un espace métrique complet séparable. La projection $P$ d'un ensemble d'unicité $M$ dans l'espace $R \times M$ projeté sur $R$ est un ensemble d'unicité dans $R$, si pour tout point $b$ de $R$, l'ensemble $M \cdot (b \times S)$ est au plus d'un point.

Demonstration :—Supposons que $M$ est donné par un système d'unicité $\{F_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$, et montrons que le schème $\{P_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ (Voir la démonstration ou Théorème I) est un système d'unicité: pour deux suites distinctes $n_1, n_2, n_3, \dots$ et $m_1, m_2, m_3, \dots$ nous avons

---

4) En modifiant un peu la démonstration du théorème I nous avons tout de suite le.

Théorème: Soient $R$ un espace $(v)$ arbitraire, $S$ un espace métrique compact, et $F$ une famille d'ensembles fermés dans $R \times S$ telle que tout produit d'un nombre fini d'ensembles de $F$ appartienne aussi à $F$. Alors la projection d'un ensemble de $F_A$ sur $R$ appartient à $F_{PA}$ où $F_P$ désigne la famille de tous les ensembles de $R$ qui sont projections des ensembles de $F$. (Quant à $F_A$ voir p. ex. H. Hahn[7] p. 342.)

$$\prod_k P_{n_1 n_2 \ldots n_k} P_{m_1 m_2 \ldots m_k} = 0 .$$

En effet supposons que $\prod_k P_{n_1 n_2 \ldots n_k} P_{m_1 m_2 \ldots m_k}$ contienne un point $p$. Soit $V(p)$ un voisinage arbitraire de $p$. Nous avons alors deux suites de points de $R \times S$: $(p_k, q_k)$ et $(p'_k, q'_k)$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ telles que $(p_k, q_k) \in F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ et $(p'_k, q'_k) \in F_{m_1 m_2 \ldots m_k}$. Il existe donc deux points $q$ et $q'$ de $S$ tels que $\lim_{k \to \infty} q_k = q$, $\lim_{k \to \infty} q'_k = q'$ ; nous avons $(p, q) \in F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ et $(p, q') \in F_{m_1 m_2 \ldots m_k}$. Donc si $q = q'$, $\{F_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ ne serait pas un système d'unicité ; et si $q \neq q'$, $M(p \times S)$ serait composé au moins de deux points distincts. C. Q. F. D.

Soit $R$ un espace quasi-accessible et $S$ un espace de tout les nombres réels $0 \leq s \leq 1$. On sait que tout ensemble analytique dans $R$ est criblé au moyen d'un crible fermé dans $R \times S$,[5] au sens de M. Lusin. Mais le Théorème I et une méthode de démonstration due à M. Sierpinski[6] nous permet d'établir la proposition inverse :

Théorème III. Soient $R$ un espace quasi-accessible et $S$ un espace de tous les nombres réels $0 \leq s \leq 1$. Tout ensemble dans $R$ criblé au moyen d'un crible analytique dans $R \times S$ est un ensemble analytique.[7]

Le Théorème I et une méthode de démonstration due à. M. M. Lusin et Kuratowski[8] nous permet d'établir le.

Théorème IV. Soit $R$ un espace quasi-accessible où tout ensemble ouvert est un ensemble analytique. Pour deux ensembles analytiques quelconques $A$ et $B$, il existe deux ensembles complémentaires analytiques $D$ et $H$ tels que

$$A - B \subset D \,;\; B - A \subset H \,;\; D \cdot H = 0 .$$

C'est le deuxième théorème de séparation de M. Lusin.[9] Sa relativisation pour l'espace euclidien a été donnée par M. Sierpinski.[10]

Etant donnée une famille d'ensembles $F$ quelconque, nous pouvons former un nouvel espace qui est un espace $(v)$, lorsque nous considérons

---

5) Voir W. Sierpinski : Les ensembles analytiques comme criblés au moyen des ensembles fermés. Fundamenta Mathematicae, tome 17 p. 77–80.

6) W. Sierpinski : Sur les cribles projectifs. ibd. p. 30–31.

7) Voir H. Hahn : Reelle Funktionen, erster Teil, Leipzig, 1932, p. 393. La proposition 44. 2. 1. s'énonce pour les espaces métriques complets séparables.

8) C. Kuratowski : Topologie I, Warszawa 1934, p. 257.

9) N. Lusin : Les Ensembles Analytiques, Paris, 1930, p. 210.

10) W. Sierpinski : Les deux principes de M. Lusin et les espaces abstraits. C. R. des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie XXIV, 1931 classe III.

tous les ensembles de $F$ et leurs produits (ainsi que l'ensemble vide) comme ensembles fermés. Par suite, en modifiant un peu la démonstration du Théorème IV, nous avons le.

Théorème V. Soit $F$ une famille d'ensembles telle que $F_c \subset F_A$.[11] Alors pour deux ensembles $A$ et $B$ quelconques de $F_A$, il existe deux ensembles $D$ et $H$ de $F_{AC}$ tels que

$$A-B \subset D\,;\; B-A \subset H\,;\; D \cdot H=0\,.$$

Les Théorèmes I et II nous permet également de généraliser une partie de la théorie des fonctions implicites due à M. M. Lebesque et Lusin[12] au cas des fonctionnelles[13] définies sur un ensemble de l'espace quasi-accessible. Une fonction $y=f(x)$ qui transforme un espace $X$ en un sous-ensemble d'un espace $Y$ est dite fonction d'unicité si, pour chaque ensemble $E$ d'unicité de $Y$, $f^{-1}(E)$ est un ensemble d'unicité de $X$.

Théorème VI. Soient $R$ un espace quasi-accessible et $S_1, S_2, S_3 \dots S_n$ des espaces de tous les nombres réels. Si l'équation

$$f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)=0$$
$$x \in R\,;\; y_i \in S_i \;\; i=1, 2, \dots, n\,.$$

où $f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ est une fonctionelle d'unicité, admet une solution $y=y_i(x)$ uniformes pour chaque point du domaine d'existence, ce domaine d'existence est nécessairement un ensemble d'unicité, et les solutions $y=y_i(x)$ sont des fonctionnelles d'unicité.

---

11) $E_c$ est la famille de tous les ensembles complémentaires aux ensembles de $F$. Quant à $F_A$, voir p. ex. H. Hahn loc. cit p. 342.

12) N. Lusin: loc. cit p. 230.

13) Vair p. ex. M. Fréchet: Les Espaces Abstraits Paris, 1928, p. 178.