175. *Eine Bemerkung über die Klassenzahl der absoluten Klassenkörper.*

Von Mikao MORIYA.
Mathematisches Institut, Hokkaido Kaiserliche Universität, Sapporo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 12, 1934.)

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper vom endlichen Grade, und K sein absoluter l-Klassenkörper.[1] Ferner seien $c_1, c_2, \cdots\cdot, c_n$ die Basiselemente der l-Klassengruppe in k und l^{e_i} die Ordnung von c_i $(i=1, \cdots, n)$. Nach dem Hauptidealsatz werden in K alle l-Klassen aus k zu der Hauptidealklasse.

Nun untersuchen wir in dieser Arbeit: *Wann ist es möglich, dass die Klassenzahl von K zu l prim wird?*

Dafür betrachten wir einen zyklischen Zahlkörper K_1 über k. Die galoissche Gruppe von K/k sei isomorph der Faktorgruppe der ganzen Idealklassengruppe von k nach derjenigen Untergruppe, die mit $c_1^l, c_2, \cdots\cdot, c_n$ und allen Idealklassen von den zu l primen Ordnungen erzeugt ist. Dann findet man in K_1 n l-Idealklassen $C_1, C_2, \cdots\cdot, C_n$ mit folgender Eigenschaft:

$$N_{K_1k}(C_1)=c_1^l, \qquad N_{K_1k}(C_i)=c_i \qquad \text{für } i=2, \cdots\cdot, n.$$

Für diese l-Klassen $C_1, C_2, \cdots\cdot, C_n$ ist die Relation

$$C_1^{x_1}\cdots\cdot C_n^{x_n}=E_{K_1} \qquad \text{(die Hauptidealklasse in } K_1)$$

nur dann möglich, wenn x_1 durch l^{e_1-1} und x_i durch l^{e_i} teilbar sind[2] $(i=2, \cdots\cdot, n)$.

Bekanntlich ist die Klassenzahl von K_1 Produkt der Klassenzahl der ambigen Idealklassen und der des Hauptgeschlechts von K_1/k. Da die Klassenzahl der ambigen Idealklassen von K_1/k genau durch $l^{e_1+\cdots\cdot+e_n-1}$ teilbar ist,[3] so ist die Klassenzahl von K_1 mindestens durch $l^{e_1+\cdots\cdot+e_n-1}$ teilbar.

Es sei von nun an die Klassenzahl von K immer prim zu l. Dann

---

1) Wir nennen den grössten abelschen Zahlkörper K über k den absoluten l-Klassenkörper, wenn die Relativdiskriminante von K nach k das Einsideal in k ist und der Grad von K nach k die grösste Potenz einer Primzahl l ist.

2) M. Moriya: Über die Klassenzahl eines relativzyklischen Zahlkörpers von Primzahlgrad, Japanese Journal of Mathematics, **10**, 4. Ich bezeichne diese Arbeit mit M.

3) M. 2.

besitzt K keinen absoluten l-Klassenkörper und somit ist der absolute l-Klassenkörper von K_1 identisch mit K, weil er immer K enthält. Da aber der Grad von K nach K_1 gleich $l^{e_1+\cdots+e_n-1}$ ist, so ist die Klassenzahl von K_1 genau durch $l^{e_1+\cdots+e_n-1}$ teilbar. Hieraus folgt sofort, dass das Hauptgeschlecht von K_1/k keine l-Klasse enthält, und die Ordnung von C_1 genau l^{e_1-1} und die von C_i genau l^{e_i} $(i=2, \cdots, n)$ sind. Also ist

$$C_i = C_i^s$$

für jedes i von $1, \cdots, n$, wobei s eine erzeugende Substitution der galoisschen Gruppe von K_1/k ist. Denn wäre $C_i \neq C_i^s$ für ein i, dann enthielte das Hauptgeschlecht von K_1/k wirklich eine l-Klasse, was unmöglich ist. Daraus folgt ohne weiteres, dass

$$N_{K_1k}(C_i) = C_i^{1+\cdots+s^{l-1}} = C_i^l = c_i E_K \qquad (i=1, \cdots, n)$$

sind.

Da aber $c_i^{l^{e_1-1}} E_K = C_1^{l^{e_1-1}} = E_K$ und $c_i^{l^{e_i-1}} E_K = C_i^{l^{e_i}} = E_K$ $(i=2, \cdots, n)$ sind, so gibt es in k genau l^n verschiedene l-Klassen, die erst in K_1 in die Hauptidealklasse übergehen. Entsprechend diesen l^n verschiedenen l-Klassen existieren in K_1 genau l^n verschiedene Einheitenklassen 1. Art aus dem Einheitenhauptgeschlecht von K_1/k.[1] Die Anzahl der verschiedenen Einheitenklassen 1. Art aus dem Einheitenhauptgeschlecht von K_1/k ist l^{r+1-d_u-q+o}.[2] Da $r+1-d_u-q+o>0$, $0 \leqq q \leqq r+1$, und $0 \leqq o \leqq 1$ ist, so gibt es höchstens l^{r+2} verschiedene Einheitenklassen 1. Art aus dem Einheitenhauptgeschlecht von K/k. Also kann n höchstens gleich $r+2$ sein.

Nun können wir leicht beweisen, dass die Klassenzahl des absoluten Klassenkörpers von k nur dann prim zu l ist, wenn die Klassenzahl von K es ist. Daraus folgt nach dem oben bewiesenen:

Die Klassenzahl des absoluten Klassenkörpers von k ist immer durch eine Primzahl l teilbar, wenn der Rang der l-Klassengruppe von k grösser ist als $r+2$, wobei r die Anzahl der Grundeinheiten in k bedeutet.

Bemerkung. Herr Scholz hat diejenigen Körper konstruiert, deren l-Klassengruppen vom Typus (l, l) sind, und deren absoluten l-Klassenkörper die zu l primen Klassenzahlen besitzen.[3]

---

1) M. 13. In unserem Fall gibt es keine Einheitenklassen 2. Art, weil die Relativdiskriminante von K_1/k das Einsideal aus k ist.

2) Die Bedeutung der hier gebrauchten Bezeichnungen sieht man auch in M. S. 10.

3) Scholz: Zwei Bemerkungen zum Klassenkörperturm, Journ. f. d. reine u. angewandte Math. **161**, 204-206.

Wir können aber für eine Primzahl l einen zyklischen Zahlkörper k vom Grade l über dem rationalen Zahlkörper bilden, deren Diskriminante durch t ($< l+2$) verschiedene Primzahlen teilbar ist. Der Rang der l-Klassengruppe von k ist mindestens $t-1 > l+1$.[1] Da die Anzahl r der Grundeinheiten in k $l-1$ ist, so ist $t-1 > r+2$. Also ist die Klassenzahl des absoluten l-Klassenkörpers sicher durch l teilbar. Ferner existieren unendlich viele solcher Körper k.

---

1) M. 7.