3. *Eine Ergänzung zur Kurventheorie im konformen Raume.*

Von Tsurusaburo TAKASU.

Mathematical Institute, Tohoku Imperial University.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Jan. 12. 1935.)

Den Fundamentalsatz der Kurventheorie im konformen Raume habe ich[1] zuerst aufgestellt. Hier möchte ich den Fundamentalsatz der Raumkurventheorie mit im konformen Raume Benutzung des Liebmannschen Parameters[2] beweisen.

Es seien (y) die pentasphärischen Punktkoordinaten der Schmiegungskugel einer Raumkurve:

$$(1) \qquad \mathfrak{x}=\mathfrak{x}(\theta), \qquad \big((\mathfrak{x}\mathfrak{x})_5=0\big),$$

$$(2) \qquad y=y(\theta), \qquad \big((yy)_5=1, \quad (dydy)_5=d\theta^2\big).$$

Die Brennpunkte $(\mathfrak{p})$ und $(\bar{\mathfrak{p}})$ des Schmiegungskreises seien wie folgt dargestellt:

$$(3) \qquad \begin{cases} \mu\mathfrak{p}=+i\dfrac{dy}{d\theta}-y, \\[2ex] \bar{\mu}\bar{\mathfrak{p}}=-i\dfrac{dy}{d\theta}-y, \end{cases}$$

wobei

$$(4) \qquad (\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}})_5=k^2, \qquad \mu\bar{\mu}=1, \qquad (\mathfrak{p}d\bar{\mathfrak{p}})_5\equiv-(\bar{\mathfrak{p}}d\mathfrak{p})_5=0,$$

$$(5) \qquad \frac{d\mu}{d\theta}=i\mu \qquad (\mu=e^{i(\theta-\theta_0)})$$

ist.

---

1) T. Takasu: Natural Equations of Curves under Circular Point-Transformation Groups and their Duals. Tôhoku Math. Journ., 25 (1925). Auszug: Jap. Journ. Math., 1 (1924).

2) H. Liebmann: Beiträge zur Inversionsgeometrie der Kurven. Münchener Berichte (1923).

R. Mühlbach: Über Raumkurven in der Möbiusschen Geometrie. Sitz.-Ber. Heidelberger Akad. (1928).

T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, XII. Über die konforme Verallgemeinerung der J. Radonschen Variationsprobleme und ihre Anwendung auf die Bestimmung der Extremalen des H. Liebmannschen Parameters. Jap. Journ. Math., 10 (1934).

Diese Note ist eine Ergänzung zum folgenden Artikel: T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, I. Tôhoku Sci. Rep., 17 (1928), Art. 99.

Diese Untersuchung ist durch die Stiftung „Saitô-Hôônkwai" unterstützt.

Differenziert man (3), so folgt:

$$\frac{d\mu}{d\theta}\mathfrak{p}+\mu\frac{d\mathfrak{p}}{d\theta}=i\frac{d^2y}{d\theta^2}-\frac{dy}{d\theta},$$

so dass nach (5) und (3)

$$i\mu\mathfrak{p}+\mu\frac{d\mathfrak{p}}{d\theta}=i\Big(i\frac{dy}{d\theta}-y\Big)+\mu\frac{d\mathfrak{p}}{d\theta}=i\frac{d^2y}{d\theta^2}-\frac{dy}{d\theta}$$

ist. Hieraus ergibt sich:

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}+y=\frac{\mu}{i}\frac{d\mathfrak{p}}{d\theta}. \tag{6}$$

Nun habe ich bewiesen[1]:

$$\rho\cdot\mathfrak{x}=\frac{d^2y}{d\theta^2}+y. \tag{7}$$

Daher ist

$$\rho\cdot\mathfrak{x}=\frac{\mu}{i}\frac{d\mathfrak{p}}{d\theta}. \tag{8}$$

Dabei ist

$$d\rho\cdot\mathfrak{x}+\rho\cdot d\mathfrak{x}=\frac{d\mu}{i}\frac{d\mathfrak{p}}{d\theta}+\frac{\mu}{i}\frac{d^2\mathfrak{p}}{d\theta^2}d\theta,$$

$$\rho^2(d\mathfrak{x}d\mathfrak{x})_5=\mu^2\Big(\frac{d^2\mathfrak{p}}{d\theta^2}\frac{d^2\mathfrak{p}}{d\theta^2}\Big)_5 d\theta^2,$$

so dass

$$\boxed{\frac{d\theta}{ds}\mathfrak{x}=\pm\frac{1}{\sqrt{\Big(\frac{d^2\mathfrak{p}}{d\theta^2}\frac{d^2\mathfrak{p}}{d\theta^2}\Big)_5}}\frac{d\mathfrak{p}}{d\theta}, \quad \big(ds^2=(d\mathfrak{x}d\mathfrak{x})_5\big)} \tag{9}$$

wird. Dies lässt sich wie folgt umschreiben:

$$\boxed{\mathfrak{x}=\pm\frac{\sqrt{(d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x})_5}}{\sqrt{(d^2\mathfrak{p}\,d^2\mathfrak{p})_5}}d\mathfrak{p}.} \tag{10}$$

Der Liebmannsche Parameter t lässt sich wie folgt schreiben:

$$\boxed{dt^4=\frac{\|\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x}\,d^2\mathfrak{x}\,d^3\mathfrak{x}\|^2}{(d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x})_5^4}=\frac{\|d\mathfrak{p}\,d^2\mathfrak{p}\,d^3\mathfrak{p}\,d^4\mathfrak{p}\|^2}{(d^2\mathfrak{p}\,d^2\mathfrak{p})_5^4},} \tag{11}$$

so dass

1) T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, I. Tôhoku Sci. Rep., 17 (1928), S. 304, Formel (322).

$$(12)\qquad \boxed{\left\| \frac{d\mathfrak{p}}{dt}\ \frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}\ \frac{d^3\mathfrak{p}}{dt^3}\ \frac{d^4\mathfrak{p}}{dt^4} \right\|^2 : \left(\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}\ \frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} \right)_5^4 = 1}$$

wird.

Setzt man $\left(\frac{d^r\mathfrak{p}}{dt^r}\ \frac{d^s\mathfrak{p}}{dt^s} \right)_5 \equiv (rs)$, so erhält man die folgende Tabelle skalarer Produkte:

$$(13)\qquad \begin{array}{llllll}
(00)=0, & (01)=0, & (02)=0, & (03)=0, & (04)=f, & (05)=\frac{5}{2}f', \\
 & (11)=0, & (12)=0, & (13)=-f, & (14)=-\frac{3}{2}f', & (15)-\frac{5}{2}f''+\phi, \\
 & & (22)\equiv f, & (23)=\frac{1}{2}f', & (24)=\frac{1}{2}f''-\phi, & (25)=\frac{1}{2}f'''-\frac{3}{2}\phi', \\
 & & & (33)\equiv\phi, & (34)=\frac{1}{2}\phi', & (35)=\frac{1}{2}\phi''-\psi, \\
 & & & & (44)\equiv\psi, & (45)=\frac{1}{2}\psi'.
\end{array}$$

Also wird (12) zu:

$$(14)\qquad \boxed{f^3\psi = -f^4 - \frac{3}{4}ff'^2\phi - \frac{3}{4}ff'^2f'' + \frac{3}{2}f^2f'\phi' + f^2\left(\frac{1}{2}f''-\phi\right)^2 + \frac{9}{16}f'^4,}$$

wodurch ψ mittels der f und ϕ allein darstellen lässt.

Setzt man von (13) in

$$\begin{vmatrix}
\mathfrak{p}^{(V)} & \mathfrak{p}^{(IV)} & \mathfrak{p}''' & \mathfrak{p}'' & \mathfrak{p}' & \mathfrak{p} \\
\mathfrak{p}_1^{(V)} & \mathfrak{p}_1^{(IV)} & \mathfrak{p}_1''' & \mathfrak{p}_1'' & \mathfrak{p}_1' & \mathfrak{p}_1 \\
\mathfrak{p}_2^{(V)} & \mathfrak{p}_2^{(IV)} & \mathfrak{p}_2''' & \mathfrak{p}_2'' & \mathfrak{p}_2' & \mathfrak{p}_2 \\
\mathfrak{p}_3^{(V)} & \mathfrak{p}_3^{(IV)} & \mathfrak{p}_3''' & \mathfrak{p}_3'' & \mathfrak{p}_3' & \mathfrak{p}_3 \\
\mathfrak{p}_4^{(V)} & \mathfrak{p}_4^{(IV)} & \mathfrak{p}_4''' & \mathfrak{p}_4'' & \mathfrak{p}_4' & \mathfrak{p}_4 \\
\mathfrak{p}_5^{(V)} & \mathfrak{p}_5^{(IV)} & \mathfrak{p}_5''' & \mathfrak{p}_5'' & \mathfrak{p}_5' & \mathfrak{p}_5
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_1' & \mathfrak{p}_1'' & \mathfrak{p}_1''' & \mathfrak{p}_1^{(IV)} \\
0 & \mathfrak{p}_2 & \mathfrak{p}_2' & \mathfrak{p}_2'' & \mathfrak{p}_2''' & \mathfrak{p}_2^{(IV)} \\
0 & \mathfrak{p}_3 & \mathfrak{p}_3' & \mathfrak{p}_3'' & \mathfrak{p}_3''' & \mathfrak{p}_3^{(IV)} \\
0 & \mathfrak{p}_4 & \mathfrak{p}_4' & \mathfrak{p}_4'' & \mathfrak{p}_4''' & \mathfrak{p}_4^{(IV)} \\
0 & \mathfrak{p}_5 & \mathfrak{p}_5' & \mathfrak{p}_5'' & \mathfrak{p}_5''' & \mathfrak{p}_5^{(IV)}
\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
\mathfrak{p}^{(V)} & \mathfrak{p}^{(IV)} & \mathfrak{p}''' & \mathfrak{p}'' & \mathfrak{p}' & \mathfrak{p} \\
(05) & (04) & (03) & (02) & (01) & (00) \\
(15) & (14) & (13) & (12) & (11) & (10) \\
(25) & (24) & (23) & (22) & (21) & (20) \\
(35) & (34) & (33) & (32) & (31) & (30) \\
(45) & (44) & (43) & (42) & (41) & (40)
\end{vmatrix} = 0$$

ein, so ergibt sich die folgende Differentialgleichung:

$$(15)\qquad \begin{vmatrix}
\mathfrak{p}^{(V)} & \mathfrak{p}^{(IV)} & \mathfrak{p}''' & \mathfrak{p}'' & \mathfrak{p}' & \mathfrak{p} \\
\frac{5}{2}f' & f & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{5}{2}f''+\phi & -\frac{3}{2}f' & -f & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2}f'''-\frac{3}{2}\phi' & \frac{1}{2}f''-\phi & \frac{1}{2}f' & f & 0 & 0 \\
\frac{1}{2}\phi''-\psi & \frac{1}{2}\phi' & \phi & \frac{1}{2}f' & -f & 0 \\
\frac{1}{2}\psi' & \psi & \frac{1}{2}\phi' & \frac{1}{2}f''-\phi & -\frac{3}{2}f' & f
\end{vmatrix} = 0,$$

worin ψ und ψ' nach (14) mittels der f und ϕ allein darstellen lassen.

Also *sind die zwei Gleichungen*

$$\boxed{(22)=f(t)\,, \qquad (33)=\phi(t)} \tag{16}$$

für dreimal stetig differenzierbare Funktion $f(t)$ *und zweimal stetig differenzierbare Funktion* $\phi(t)$ *als natürliche Gleichungen der Kurve* $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(t)$ *brauchbar*, da die Differentialgleichung (15) durch Angaben von (16) in Bezug auf $\mathfrak{p}$ auflösen lässt und die Funktionen $\mathfrak{x}(t)$ den $d\mathfrak{p}(t)$ proportional sind.

Es ist nicht schwer (16) mittes der Grössen $y(\theta)$, $\dfrac{d\theta}{dt}$, $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ und $\dfrac{d^3\theta}{dt^3}$ darzustellen.